Lösungen zu Kapitel 9

9.1. Zur Ableitung der Cost-of-Carry-Relation für die drei angegebenen Kontrakte verwenden wir die Notation aus dem Buch, wobei L die Lagerkosten sind, die am Periodenanfang gezahlt werden müssen.

(a) *Goldterminkontrakt*

Zeitpunkte der Transaktionen	$t=0$	$t=T$
Long Spot	$-S_0$	S_T
Short Forward	0	$F_0(T)-S_T$
Kredit	$F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}$	$-F_0(T)$
Portefeuille	$F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}-S_0$	0

Fall 1: $F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}-S_0>0$
Die in der Tabelle angegebene Strategie liefert in $t=T$ einen Cash Flow von 0 und in $t=0$ einen Gewinn in Höhe von $F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}-S_0$.
Fall 2: $F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}-S_0<0$
Die Umkehrung der in der Tabelle angegebenen Strategie (Leerverkauf des Basiswertes, Long Forward und Anlage des diskontierten Futures-Preises) liefert in $t=T$ einen Cash Flow von 0 und in $t=0$ einen Gewinn in Höhe von $S_0-F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}$.
Unter der Annahme der *Arbitragefreiheit* muss daher gelten:

$$F_0(T)=S_0\mathrm{e}^{rT} \ .$$

(b) *Weizenterminkontrakt*

Zeitpunkte der Transaktionen	$t=0$	$t=T$
Long Spot	$-S_0-L$	S_T
Short Forward	0	$F_0(T)-S_T$
Kredit	$F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}$	$-F_0(T)$
Portefeuille	$F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}-(S_0+L)$	0

Aus der Annahme der Arbitragefreiheit folgt mit der Argumentation aus (a):

$$F_0(T)=(S_0+L)\mathrm{e}^{rT}.$$

(c) *Devisentermingeschäft*

Zeitpunkte der Transaktionen	$t=0$	$t=T$
Anlage in Fremdwährung	$-S_0\mathrm{e}^{-r^*T}$	S_T
Short Forward	0	$F_0(T)-S_T$
Kredit in Inlandswährung	$F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}$	$-F_0(T)$
Portefeuille	$F_0(T)\mathrm{e}^{-rT}-S_0\mathrm{e}^{-r^*T}$	0

Aus der Annahme der Arbitragefreiheit folgt mit der Argumentation aus (a):

$$F_0(T)=S_0\mathrm{e}^{(r-r^*)T} \ .$$

9.2. (a) Die Cost-of-Carry-Relation bei konstanter intertemporaler Transferkostenrate lautet:

$$F_t(T) = S_t \mathrm{e}^{b(T-t)} ,$$

zum Beispiel für ein Devisentermingeschäft $F_t(T) = S_t \mathrm{e}^{(r-r^*)(T-t)}$.

(b) Bei Fälligkeit des Forward-Kontraktes müssen der Forward-Preis und der Kassapreis übereinstimmen, da sonst Arbitragemöglichkeiten existieren. Diese Tatsache steht in Einklang mit der Cost-of-Carry-Relation:

$$F_T(T) = S_T \mathrm{e}^{b(T-T)} = S_T \mathrm{e}^0 = S_T .$$

Zu jedem Zeitpunkt $t < T$ vor Fälligkeit gilt jedoch:

$$\begin{aligned} F_t(T) &< S_t, \quad \text{falls} \quad b < 0 , \\ F_t(T) &> S_t, \quad \text{falls} \quad b > 0 . \end{aligned}$$

Der Terminpreis ist also größer (kleiner) als der Kassapreis, falls die intertemporalen Transferkosten positiv (negativ) sind.

(c) Eine Long Position in einem *Forward* verbrieft die vertragliche Verpflichtung, zum Zeitpunkt T den Basiswert zum Preis $F_0(T)$ zu kaufen. Diese Verpflichtung hat bei Abschluss des Termingeschäftes den Wert 0, da der Forward-Preis gerade so festgelegt wurde, dass der Terminkontrakt gleichwertig ist mit einer Kassaposition, die bis T gehalten wird (gemäß den augenblicklichen intertemporalen Transferkosten). Zu jedem späteren Zeitpunkt $t > 0$ hat der im Zeitpunkt 0 vereinbarte Forward-Kontrakt mit Forward-Preis $F_0(T)$ jedoch den Wert:

$$v_t = [F_t(T) - F_0(T)]\, \mathrm{e}^{-r(T-t)} . \qquad \text{(L.1)}$$

Dies lässt sich durch die folgende Arbitrageüberlegung begründen:
Fall 1: $v_t < [F_t(T) - F_0(T)]\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}$
Der Kauf des in 0 vereinbarten Forward-Kontraktes und Verkauf eines in t abgeschlossenen Forwards liefert einen sicheren Arbitragegewinn.

Zeitpunkte	t	$t = T$
Long $F_0(T)$	$-v_t$	$S_T - F_0(T)$
Short $F_t(T)$	0	$F_t(T) - S_T$
Kredit/Anlage	$[F_t(T) - F_0(T)]\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}$	$-[F_t(T) - F_0(T)]$
Strategie	$\varepsilon = [F_t(T) - F_0(T)]\, \mathrm{e}^{-r(T-t)} - v_t > 0$	0

Fall 2: $v_t > [F_t(T) - F_0(T)]\, \mathrm{e}^{-r(T-t)}$
In diesem Fall liefert die Umkehrung der vorgenannten Strategie einen sicheren Arbitragegewinn in 0. Um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen, muss also Gleichung (L.1) gelten. Ein *Future* wird täglich glattgestellt, also quasi jeden Tag neu geschrieben und hat daher jeden Tag nach der Glattstellung den Wert 0. Der Wert eines in 0 vereinbarten Forward-Kontraktes zum Zeitpunkt t

(d) Abbildung L.20 zeigt das Gewinn und Verlust-Profil eines Forwards bei Fälligkeit in T. Für den Wert bei Fälligkeit in T gilt wegen $F_T(T) = S_T$

$$v_T = (F_T(T) - F_0(T))\mathrm{e}^{-r(T-T)} = S_T - F_0(T) \; .$$

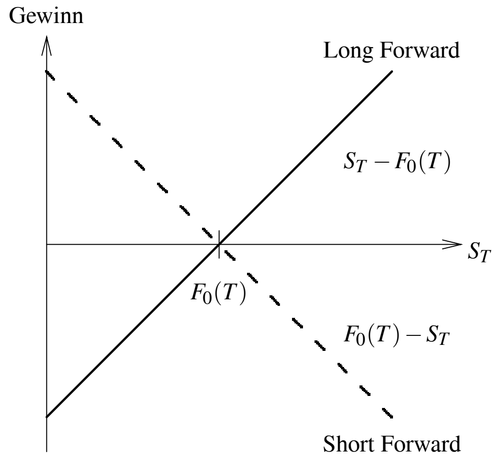


Abb. L.20. *Aufgabe 9.4.d: Gewinn-und-Verlust-Profil eines Forwards.*

9.3. Die Term-Structure of Futures Prices beschreibt die Relation zwischen Futures-Preisen und den zugehörigen Fälligkeiten. Analog zur Cost-of-Carry-Relation gilt:

$$F_t(T_2) = F_t(T_1)\mathrm{e}^{b(T_2-T_1)} \; . \tag{L.2}$$

Die dieser Beziehung zugrundeliegende Arbitragestrategie ist in der folgenden Tabelle für den Spezialfall $b = r$ angegeben.

Zeitpunkte	$t=0$	$t=T_1$	$t=T_2$
Long Future $F_t(T_1)$	0	$-F_t(T_1)$	$+S_{T_2}$
Short Future $F_t(T_2)$	0	0	$F_t(T_2) - S_{T_2}$
Kredit	0	$+F_t(T_1)$	$-F_t(T_1)\mathrm{e}^{r(T_2-T_1)}$
Strategie	0	0	$F_t(T_2) - F_t(T_1)\mathrm{e}^{r(T_2-T_1)}$

Fall 1: $F_t(T_2) > F_t(T_1)\mathrm{e}^{r(T_2-T_1)}$

Die in der Tabelle angegebene Strategie liefert einen Arbitragegewinn.

Fall 2: $F_t(T_2) < F_t(T_1)\mathrm{e}^{r(T_2-T_1)}$

Die Umkehrung der angegebenen Strategie liefert einen Arbitragegewinn. Unter der Annahme der Arbitragefreiheit muss daher die Beziehung

$$F_t(T_2) = F_t(T_1)\mathrm{e}^{r(T_2-T_1)}$$

gelten, bzw. bei Berücksichtigung weiterer intertemporaler Transferkosten die Gleichung (L.2).

(a) Bei kontinuierliche Lagerkostenrate in Höhe von l gilt für die intertemporalen Transferkosten $b = r + l$. Daher folgt aus Gleichung (L.2)

$$\frac{F_t(T_2)}{F_t(T_1)} = \mathrm{e}^{b(T_2-T_1)}$$

bzw.

$$b = \ln\left(\frac{F_t(T_2)}{F_t(T_1)}\right) \cdot \frac{1}{T_2 - T_1}$$

Die Restlaufzeit des März-Futures ist gerade zwei Monate länger als die Restlaufzeit des Januar-Futures, d.h. es gilt $T_2 - T_1 = 1/6$ Jahr. Mit den Daten der Aufgabe ($F_t(T_2) = F(\text{März}) = 576,-$US-\$ und $F_t(T_1) = F(\text{Jan}) =$ 564,25US-\$) gilt für die intertemporalen Transferkosten bzw. für die Lagerkosten:

$$\begin{aligned} b &= 6(\ln(576/564{,}25)) = 0{,}123661 = 12{,}3661\,\%, \\ l &= b - r = 12{,}3661\,\% - 9\,\% = 3{,}3661\,\% \,. \end{aligned}$$

(b) *Lagerkosten am Periodenanfang fällig*
Die Lagerkosten müssen vollständig am Anfang der Lagerperiode gezahlt werden. Die Arbitragestrategie erfordert also in T_1 nicht nur den Kauf des Basiswertes zum Preis $F_t(T_1)$, sondern zusätzlich die Zahlung der Lagerkosten L:

$$F_t(T_2) = (F_t(T_1) + L)\mathrm{e}^{r(T_2-T_1)}$$

Auflösen nach L ergibt die Gleichung:

$$L = F_t(T_2)\mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)} - F_t(T_1) = 576\mathrm{e}^{-0{,}09\cdot 1/6} - 564{,}25 = 3{,}17\text{US-\$}.$$

Die Lagerkosten in Höhe von 3,17 US-\$ sind ausgedrückt als jährlicher Prozentsatz (vgl. das Ergebnis mit kontinuierlichem Lagerkostensatz):

$$\frac{3{,}17\,\$}{564{,}25\,\$} \cdot 6 = 3{,}3756\,\% \,.$$

9.4. (a) Die Cost-of-Carry-Relation für Forwards auf Aktien mit einer sicheren Dividende lautet:

$$F_0(T) = S_0\mathrm{e}^{rT} - DIV_\tau \mathrm{e}^{r(T-\tau)} \,.$$

Dies wird mit der folgenden Arbitragetabelle bewiesen:

Zeitpunkte	$t=0$	$t=\tau<T$	$t=T$
Long Aktie	$-S_0$	0	S_T
Dividende	0	$+DIV$	0
Short Forward	0	0	$F_0(T) - S_T$
Kredit 1	$+S_0 - DIV\mathrm{e}^{-r\tau}$	0	$-S_0\mathrm{e}^{rT} + DIV\mathrm{e}^{r(T-\tau)}$
Kredit 2	$DIV\mathrm{e}^{-r\tau}$	$-DIV$	0
Portefeuille	0	0	$F_0(T) - S_0\mathrm{e}^{rT} + DIV\mathrm{e}^{r(T-\tau)}$

Das in der Arbitragetabelle dargestellte Portefeuille liefert in $t = 0$ und $t = \tau$ einen Cash Flow von null. Daher muss für den Cash Flow in $t = T$

$$F_0(T) - S_0 e^{rT} + DIV e^{r(T-\tau)} = 0$$

gelten, woraus unmittelbar die Cost-of-Carry-Relation folgt.

(b) Für den Forward-Preis in $t = 0$ folgt daher:

$$F_0(T) = S_0 e^{rT} - DIV_\tau e^{r(T-\tau)} = 250 \cdot e^{0{,}05 \cdot 1/2} - 12 \cdot e^{0{,}05 \cdot 1/4} = 244{,}1778\,.$$

Der Wert eines Kontraktes mit Forward-Preis $F_0(T) = 244{,}1778$ ist bei Emission in $t = 0$ gerade 0.

(c) Nach 4 Monaten folgt für den Forward-Preis eines neu geschriebenen Kontraktes:

$$F_t(T) = S_t e^{r(T-t)} = 245 e^{0{,}05 \cdot 1/6} = 247{,}0502\,.$$

Der Wert v_t des in $t = 0$ vereinbarten Forward-Kontraktes mit Forward-Preis $F_0(T) = 244{,}1778$ ergibt sich aus:

$$v_t = (F_t(T) - F_0(T)) e^{-r(T-t)} = (247{,}0502 - 244{,}1778) e^{-0{,}05 \cdot 1/6} = 2{,}8487\,.$$

Der Wert der Short Position ist demzufolge $-2{,}8487$.

9.5. (a) Devisen*forwards* (traditionelle Devisentermingeschäfte) werden individuell ausgehandelt und erst bei Fälligkeit abgerechnet. Eine fristen- und betragskongruente Absicherung liefert also einen "100 %igen" Hedge.

Futures hingegen sind hinsichtlich Fälligkeit und Kontraktwert standardisiert und werden täglich abgerechnet. Ein Unternehmen, das sich mit Devisen-Futures absichert, bleibt deshalb den folgenden Risiken ausgesetzt:

(1) *Basisrisiko*, da Fälligkeit und Nennwert des Futures und der abzusichernden Position nicht übereinstimmen müssen.

(2) *Zinsänderungsrisiko* aufgrund des Daily Settlement.

(b) Annahme: Das Unternehmen kauft Forwards / Futures (Long Position) zur Absicherung einer Währungs-Transaktion.

(1) Für das Basisrisiko gilt: Sind die Futures-Preise unerwartet gestiegen (gefallen), so ist eine Absicherung mit Futures, die einen zu hohen Nennwert und eine zu lange Laufzeit aufweisen, vorteilhaft (nachteilig) (Quasi-Spekulationsgewinn bzw. -verlust).

(2) Für das Zinsänderungsrisiko gilt: Sind die Futures-Preisänderungen und Zinsänderungen positiv (negativ) korreliert, so sind Futures-Kontrakte (bzw. Forward-Kontrakte) vorteilhaft.

9.6. Die DAX-Kaufoptionen mit Fälligkeit Juni haben die Preise $C(K_1 = 1550) = 115$ Euro und $C(K_2 = 1575) = 120$ Euro. Eine Kaufoption verbrieft das Recht, den Basiswert zum Basispreis zu kaufen. Der Wert dieses Rechtes fällt daher, wenn der Basispreis steigt. Also muss $C(K_1) > C(K_2)$ gelten, falls für die Basispreise $K_1 < K_2$ gilt. Diese Beziehung ist hier aber verletzt ($C(K_1 = 1550) < C(K_2 = 1575)$). Eine Anlagestrategie, die einen sicheren Gewinn verspricht, kann also nach dem Motto "buy low, sell high" konstruiert werden. In diesem Fall bedeutet es, dass die Option mit dem zu niedrigen Preis $C(K_1 = 1550)$ gekauft wird und die Option mit dem zu hohen Preis $C(K_2 = 1575)$ verkauft wird:

Zeitpunkte	$t = 0$	$t = T$		
Transaktionen		$S_T < 1550$	$1550 \leq S_T \leq 1575$	$S_T > 1575$
Kauf $C(K_1)$	–115,–	0	$S_T - 1550$	$S_T - 1550$
Verkauf $C(K_2)$	120,–	0	0	$1575 - S_T$
Anlagestrategie	5,–	0	$S_T - 1550 \geq 0$	25

Daher entsteht in $t = 0$ ein sicherer Gewinn von 5,- Euro und in $t = T$ ein nicht-negativer Cash Flow.

9.7. (i) Für *Kaufoptionen* gilt die Wertuntergrenze

$$C_{t_D} \geq \max\{0, S_{t_D}^{ex} - K + DIV, S_{t_D}^{ex} - K\mathrm{e}^{-r(T-t_D)}\}$$

Eine frühzeitige Ausübung kann vorteilhaft sein (vgl. Abbildung L.21), falls

$$S_{t_D}^{ex} - K + DIV > S_{t_D}^{ex} - K\mathrm{e}^{-r(T-t_D)}$$

gilt, bzw. die Dividende den Zusammenhang $DIV > K\left(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t_D)}\right)$ erfüllt.

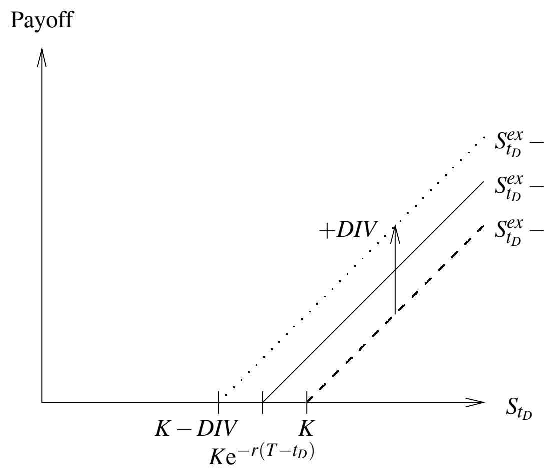


Abb. L.21. *Early Exercise Amerikanischer Calls mit Dividenden.*

Vorzeitige Ausübung wird also nur durch das "Einfangen einer Dividende" vorteilhaft, die die Zinsopportunitätskosten aufgrund der frühzeitigen Zahlung des Basispreises in t statt in T übersteigt. Mit "Einfangen einer Dividende" ist, etwas bildlich gesprochen, die Sicherung des Dividendenanspruches durch die Ausübung der Option vor dem Dividendenabschlagstermin gemeint. Optimal ist daher stets der Zeitpunkt unmittelbar vor dem Dividendenabschlagstermin.

Hier ist zu beachten: Eine vorzeitige Ausübung kann vorteilhaft sein, muss aber nicht.

(ii) Für *Verkaufsoptionen* gilt die Wertuntergrenze

$$P_t \geq \max\{0, K - S_t, Ke^{-r(T-t)} - S_t\}$$

Frühzeitige Ausübung kann zu jedem Zeitpunkt (unabhängig von Dividenden) vorteilhaft sein, da

$$K - S_t > Ke^{-r(T-t)} - S_t \ .$$

M. a. W. ist die vorzeitige Ausübung mit Hinblick auf den Zinseffekt stets vorteilhaft. Durch die vorzeitige Ausübung wird jedoch jede zukünftige Chance aufgegeben. Eine vorzeitige Ausübung hängt also letztlich von der Abwägung der beiden Einflüsse ab. Im Grenzfall $S_t = 0$ wird keine zukünftige Chance aufgegeben und daher sofort ausgeübt (vgl. Abbildung L.22).

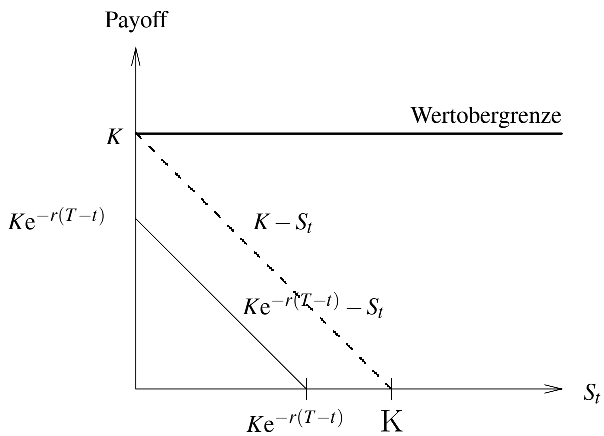


Abb. L.22. *Early Exercise Amerikanischer Puts.*

Einen abschließenden Überblick über die Wirkung der Einflussfaktoren auf die Entscheidung der frühzeitigen Ausübung gibt die nachfolgende Tabelle.

Faktor	Call	Put
Dividende	+	–
Zinsen auf K	–	+
Verlust zukünftiger Chancen	–	–

9.8. (a) Die Wertuntergrenze eines Amerikanischen Calls ohne Dividende ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C \geq \max\{0; S-K; S-Ke^{-rT}\} &= \max\{0; 500-490; 500-490e^{-0{,}07\cdot 1/3}\} \\ &= \max\{0; 10; 21{,}30\} = 21{,}30 \end{aligned}$$

(b) Die Wertuntergrenze eines Amerikansichen Calls mit einer Dividendenzahlung in Höhe von DIV in t_1 ist gegeben durch

$$C \geq \max\{0, C^1, C^2, C^3\} = 15{,}68 \;,$$

mit

$$C^1 = S - K = 500 - 490 = 10$$
$$C^2 = S - K\mathrm{e}^{-rt_1} = 500 - 490 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}07 \cdot 1/6} = 15{,}68$$
$$C^3 = S - DIV\mathrm{e}^{-rt_1} - K\mathrm{e}^{-rT} = 500 - 15\mathrm{e}^{-0{,}07 \cdot 1/6} - 490 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}07 \cdot 1/3} = 6{,}47 \,.$$

Die Intuition für die Wertuntergrenze ist die folgende: Ist C^1 verletzt, so wird sofort ausgeübt, ist C^2 verletzt, so wird unmittelbar vor dem Dividendentermin ausgeübt und ist C^3 verletzt, so wird bei Fälligkeit ausgeübt. Die sichere Ausübung zu den genannten Terminen erlaubt eine Arbitragestrategie, die einen sofortigen Gewinn sichert.

(c) Da die Wertuntergrenze verletzt ist (für die Option gilt $C = 1$, d. h. die Option ist unterbewertet), existiert hier eine *Arbitragemöglichkeit*: Es wird ein Call gekauft und unmittelbar vor dem Dividendentermin ausgeübt — siehe (b). Weiter wird eine Aktie leerverkauft (und später mit der Aktie aus der Call-Ausübung bedient) und der Erlös daraus am Geldmarkt angelegt. Daraus ergibt sich ein Arbitragegewinn:

Zeitpunkte	$t = 0$	$t = t_1$	
Transaktionen		$S_{t_1} \leq 490$	$S_{t_1} > 490$
Call long	$-\ 13$	0	$S_{t_1} - 490$
Aktie short	$+\ 500$	$-\ S_{t_1}$	$-\ S_{t_1}$
Anlage	$-\ 490\ \mathrm{e}^{-0{,}07 \cdot 1/6}$	490	490
Arbitragegewinn	2,68	≥ 0	0

Lösungen zu Kapitel 10

10.1. Die beiden mögliche Zustände (upstate und downstate) lassen sich wie in Abbildung L.23 veranschaulichen.

$$
\begin{array}{lcl}
 & & S^u = U \cdot S = 88 \\
 & & C^u = \max\{0, S^u - K\} = 8 \\
S = 80 & \nearrow & 1 \\
C = ??? & & \\
R^{-1} = 1/1{,}05 & \searrow & S^d = D \cdot S = 72 \\
 & & C^d = \max\{0, S^d - K\} = 0 \\
 & & 1
\end{array}
$$

Abb. L.23. *Aufgabe 10.1: Einperiodiger Binomialbaum zur Call-Bewertung.*

(a) Ein Call kann durch den kreditfinanzierten Kauf einer bestimmten Anzahl von Aktien dupliziert werden. Dazu müssen die Anzahlen h^S bzw. h^B der benötigten Aktien bzw. Zeros so bestimmt werden, dass das so gebildete Portefeuille in den beiden zukünftigen Umweltzuständen im Zeitpunkt $t = 1$ den gleichen Wert besitzt wie der Call:

$$
\begin{aligned}
C^u &= h^S S^u + h^B 1 \quad \textit{(Uptick)}, \\
C^d &= h^S S^d + h^B 1 \quad \textit{(Downtick)}.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich:[4]

$$
\begin{aligned}
h^S &= \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}\,, \\
h^B &= (C^d - h^S S^d) = \left(0 - \frac{1}{2} \cdot 72\right)/1{,}05 = -36\,.
\end{aligned}
$$

Das *Duplikationsportefeuille* besteht also aus einer halben Aktie ($h^S = 1/2$) und einer Short Position von 36 Zeros ($h^B = -36$).

(b) Die *Hedge Ratio* berechnet sich durch

$$
h^s = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d} = \frac{\Delta C}{\Delta S} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{(häufig auch als } \Delta \text{ bezeichnet)}\,.
$$

Die Hedge Ratio ist kleiner als 1, da der Aktienkurs absolut stärker schwankt als der Wert der Option. Zur Duplikation der Option mit Hilfe der Aktie werden daher weniger Aktien als Optionen benötigt.

---

[4] Im Buch wird eine Formel für h^B hergeleitet, die h^S nicht mehr enthält. Diese Formel erhält man leicht durch Einsetzen von $h^S = \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d}$ in die hier angegebene Formel:

$$
\begin{aligned}
h^B = [(C^d - h^s S^d)] &= \left[C^d - \frac{C^u - C^d}{S^u - S^d} S^d\right] = \frac{C^d(S^u - S^d) - S^d(C^u - C^d)}{(S^u - S^d)} \\
&= \frac{C^d S(U - D) - DS(C^u - C^d)}{S(U - D)} = \frac{UC^d - DC^u}{(U - D)}\,.
\end{aligned}
$$

(c) Die *Optionsprämie*, d. h. der Wert des Calls, entspricht dem Barwert seines Duplikationsportefeuilles:

$$C = h^S S + h^B R^{-1} = \frac{1}{2} \cdot 80 - 36 \cdot \frac{1}{1{,}05} = 40 - 34{,}29 = 5{,}71\ .$$

(d) Die *risikoneutrale Wahrscheinlichkeit* dafür, dass der Call im Geld endet, ist gleich der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit für einen Uptick, da der Call nur im Uptick im Geld ist:

$$Q(S_T > K) = q = \frac{R-D}{U-D} = \frac{1{,}05-0{,}9}{1{,}1-0{,}9} = \frac{0{,}15}{0{,}2} = \frac{3}{4} = 75\,\%\ .$$

(e) Der Wert einer *Put-Option* kann mit Hilfe des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{E}_Q(P_T)/R = (q \cdot P^u + (1-q)P^d)/R \\ &= (0{,}75 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot 8)/1{,}05 = 1{,}90\ . \end{aligned}$$

(f) Die im Binomialmodell ermittelten Call- und Put-Werte erfüllen die *Put-Call-Parität*, wie die folgende Rechnung bestätigt:

$$P = C - S + \frac{K}{R} = 5{,}71 - 80 + \frac{80}{1{,}05} = 1{,}90\ .$$

(g) Bei einem risikolosen Zinssatz von $r = 15\%$ (d. h. $R = 1{,}15$) erhält man für die Binomialwahrscheinlichkeit

$$q = \frac{R-D}{U-D} = \frac{1{,}15-0{,}9}{1{,}1-0{,}9} = 1{,}25\ .$$

Die 'Binomialwahrscheinlichkeit' für den Kursanstieg ist also 125 % und für den Kursrückgang −25 % . 125 % und −25 % sind keine Wahrscheinlichkeiten, da sie größer als 100 % bzw. kleiner als 0 % sind. Die Berechnung des Erwartungswertes mit diesen Werten als Wahrscheinlichkeiten ist daher nicht korrekt. Ursache dieser unzulässigen Werte für q und $1-q$ ist die Tatsache, dass die risikobehaftete Aktie selbst bei einem Kursanstieg eine geringere Rendite erbringt als die risikolose Anlage. Für den Wert des Calls errechnet man nach der normalen Erwartungswert-Formel mit diesen Werten für q und $1-q$:

$$C = [qC^u + (1-q)C^d]/R = [1{,}25 \cdot 8 - 0{,}25 \cdot 0]/1{,}15 = 8{,}70\ .$$

(h) Der Markt ist bei einem risikolosen Zins von 15 % nicht arbitragefrei, da die risiklose Anlage eine höhere Rendite erbringt als die Aktie bei günstigem Konjunkturverlauf. Ein Arbitrageur kann durch Leerverkauf der Aktie (oder durch Verkauf aus einem bestehenden Portefeuille) und Anlage der Rückflüsse zum risikolosen Zins einen risikolosen Gewinn erzielen. Bei günstigem Konjunkturverlauf ergibt sich ein Gewinn von EUR 4,−. Bei schlechter Konjunkturentwicklung beläuft sich der Gewinn sogar auf EUR 20,−. Ein rational handelnder Investor würde die Aktie daher nicht kaufen.

10.2. (a) Der *Preis der Kaufoption* ist

$$C = [q^2 \cdot C^{uu} + 2 \cdot q(1-q) \cdot C^{ud} + (1-q)^2 C^{dd}]/R^2 \ ,$$

wobei die Call-Werte bei Fälligkeit dem Binomialbaum in Abbildung L.24 zu entnehmen sind.

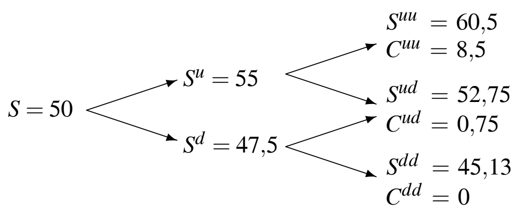


Abb. L.24. *Aufgabe 10.2: Zweiperiodiger Binomialbaum .* Call mit Ausübungspreis $K = 550$, Kursanstieg $U = 1{,}1$, Kursrückgang $D = 0{,}95$.

Für die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten q und $(1-q)$ gilt:

$$q = \frac{R-D}{U-D} = \frac{(1+0{,}08 \cdot 0{,}5) - 0{,}95}{1{,}1 - 0{,}95} = \frac{0{,}09}{0{,}15} = 0{,}6 \, ,$$
$$(1-q) = 0{,}4 \ .$$

Der Preis der Kaufoption ist daher:

$$C = [0{,}6^2 \cdot 8{,}5 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}25]/1{,}04^2 = 3{,}17/1{,}04^2 = 2{,}94 \ .$$

(b) Die *Duplikationsstrategie* muss für jeden Knoten berechnet werden. Dazu bezeichne h^S bzw. h^B die benötigten Aktien bzw. Zeros.

(1) Im Knoten „upstate in $t = 1$“ soll die Duplikationsstrategie den Call nachbilden (d. h. für den Call-Wert gilt $C^u = h^s S^u + h^B R^{-1}$):

$$\begin{aligned} C^{uu} &= h^S S^{uu} + h^B 1 \\ C^{ud} &= h^S S^{ud} + h^B 1 \end{aligned}$$

Auflösen nach h^S und h^B liefert das Ergebnis

$$\begin{aligned} h^S &= \frac{C^{uu} - C^{ud}}{S^{uu} - S^{ud}} = \frac{8{,}5 - 0{,}25}{60{,}5 - 52{,}25} = 1 \\ h^B &= [C^{ud} - h^S S^{ud}] = -52 \\ \text{und damit } C^u &= h^S S^u + h^B R = 1 \cdot 55 - \frac{52}{1{,}04} = 5 \end{aligned}$$

(2) Im Knoten „downstate in $t = 1$“ soll die Duplikationsstrategie wiederum den Call nachbilden (d. h. für den Call-Wert gilt $C^d = h^s S^d + h^B R^{-1}$):

$$\begin{aligned} C^{du} &= h^S S^{du} + h^B 1 \\ C^{dd} &= h^S S^{dd} + h^B 1 \end{aligned}$$

Auflösen nach h^S und h^B liefert das Ergebnis

$$\begin{aligned} h^S &= \frac{0{,}25-0}{52{,}25-45{,}13} = 0{,}035 \\ h^B &= -0{,}035 \cdot 45{,}13 = -1{,}58 \\ \text{und damit } C^d &= 0{,}035 \cdot 47{,}5 - \frac{1{,}58}{1{,}04} = 0{,}14 \end{aligned}$$

(3) Im Zeitpunkt $t=0$ gilt dann für $C = h^S S + h^B R^{-1}$:

$$\begin{aligned} C^u &= h^S S^u + h^B 1 \\ C^d &= h^S S^d + h^B 1 \end{aligned}$$

Auflösen nach h^S und h^B liefert das Ergebnis

$$\begin{aligned} h^S &= \frac{5-0{,}14}{55-47{,}5} = 0{,}648 \\ h^B &= -30{,}64 \\ C &= 0{,}648 \cdot 50 - \frac{30{,}64}{1{,}04} = 2{,}94 \end{aligned}$$

Tabelle L.1 veranschaulicht, dass die ermittelte Duplikationsstrategie selbstfinanzierend ist.

(c) Die Option ist unterbewertet. Ein Arbitragegewinn kann wie folgt realisiert werden:
Verkauf der Duplikationstrategie aus (b) und Kauf der Option.

- Gewinn in $t=0$: 2,94 - 2,50 = 0,44
- keine Zahlungen in $t=1$, da die Strategie selbstfinanzierend ist.
- CF von 0 in $t=2$, da die Duplikationstrategie die Zahlungen der Option exakt dupliziert.

Anmerkung:
Die Arbitragestrategie erfordert die Anpassung des Portefeuilles bei Aktienkursänderungen. Reale Arbitragemöglichkeiten existieren daher nicht, da ein Rebalancing nicht kontinuierlich durchführbar ist. Zu beachten ist weiterhin, dass eine Duplikation des Calls mit Aktie und Bond nur aufgrund einer Verteilungsannahme (Anzahl der Upstates ist binomialverteilt) möglich ist. Wird diese Annahme von der realen Kursentwicklung nicht erfüllt, bzw. deutlich verletzt, so handelt es sich bei der angegebenen Strategie nicht mehr um eine Arbitragemöglichkeit.

10.3. (i) Der Wert

$$L_T = \max\{S_T - S_{min}; 0\} \quad \text{mit} \quad S_{min} = \min_t S_t$$

der Lookback Option bei Fälligkeit ist pfadabhängig. Das heißt, dass der Wert der Option bei Fälligkeit nicht nur vom Wert des Basisinstruments

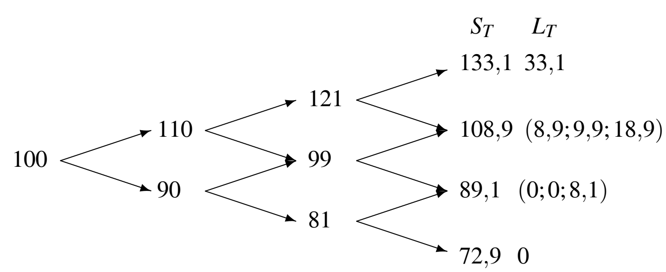
Tabelle L.1. *Duplikationsstrategie und zugehörige Cash Flows.*

	$t=0$	$t=1$				$t=2$			
		vor Umschichtung		nach Umschichtung					
		U	D	U	D	UU	UD	DU	DD
Call	$-2{,}94$	0	0	0	0	8,5	0,25	0,25	0
Aktie	$-32{,}4$	$+35{,}64$	$+30{,}78$	-55	$-1{,}66$	60,5	52,25	1,83	1,58
Anzahl	0,648	0,648	0,648	1	0,035	1	1	0,035	0,035
Kurs	50	55	47,5	55	47,5	60,5	52,25	52,25	45,13
Kredit	$+29{,}46$	$-30{,}64$	$-30{,}64$	$+50$	$+1{,}52$	-52	-52	$-1{,}58$	$-1{,}58$
Anzahl	$-30{,}64$	$-30{,}64$	$-30{,}64$	-52	$-1{,}58$	-52	-52	$-1{,}58$	$-1{,}58$
Kurs	0,96	1	1	0,96	0,96	1	1	1	1
PF	$-2{,}94$	$+5$	$+0{,}14$	-5	$-0{,}14$	8,5	0,25	0,25	0

zu diesem Zeitpunkt abhängt, sondern *zusätzlich* vom *Verlauf* des Basisinstruments bis zur Fälligkeit der Option. Somit können in den Endknoten mehrere verschiedene Preise existieren (vgl. Abbildung L.25). Beispielsweise kann der zum Aktienpreis von 108,9 korrespondierende Endknoten auf drei Pfaden erreicht werden:

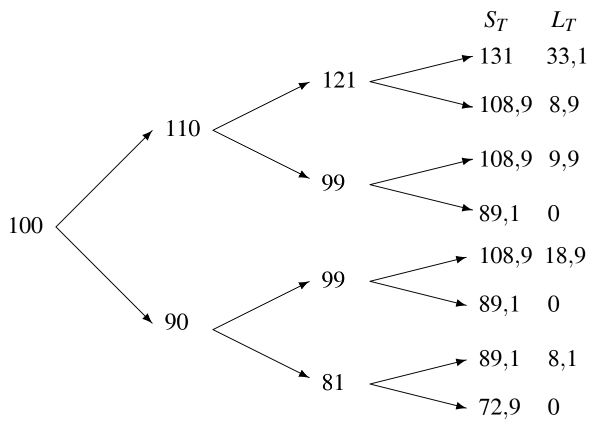
- Uptick/Uptick/Downtick: $L_T = \max\{108{,}9 - 100\} = 8{,}9$,
- Uptick/Downtick/Uptick: $L_T = \max\{108{,}9 - 99\} = 9{,}9$,
- Downtick/Uptick/Uptick: $L_T = \max\{108{,}9 - 90\} = 18{,}9$.

Abb. L.25. *Preispfade der Aktie und Zahlungsprofil der Lookback-Option.*



(ii) Eine mögliche *Modifikation des Modells* ist die 'Entflechtung' des Binomialbaums zu einem nicht-rekombinierenden Baum (vgl. Abbildung L.26).

Abb. L.26. *Aufgabe 10.3.ii: Nicht-rekombinierender Binomialbaum.*



Ein Problem an dieser Modifikation ist jedoch, dass die Anzahl der Endknoten im nicht-rekombinierenden Binomialbaum *exponentiell* mit der Anzahl der Perioden n steigt,

$$\# \text{ Knoten} = 2^n ,$$

während sie im rekombinierenden Baum *linear* mit n steigt

$$\# \text{ Knoten} = (n+1) .$$

10.4. Unter der Annahme, dass die Dividende in $t = T_D = 3$ sicher ist, entfällt die gesamte Volatilität der Aktie, die durch u und d zum Ausdruck kommt, auf den Aktienkurs abzüglich des Barwertes der Dividende. Im Binomialbaum wird daher auch der Aktienkurs ex Dividende S_t modelliert. Der tatsächliche Kurs in den jeweiligen Zuständen ergibt sich durch Addition des Barwertes der Dividende

$$PV(DIV) = \mathrm{e}^{-r(T_D-t)} DIV .$$

Vorzeitige Ausübung Amerikanischer Kaufoptionen kann nur unmittelbar vor einem Dividendenabschlagstermin vorteilhaft sein. Die Bewertung des Amerikanischen Calls erfolgt daher durch Rückwärtsrechnung im Binomialbaum ausgehend vom Wert bei Fälligkeit $\max\{S_T - K, 0\}$ bis zum Dividendenzeitpunkt wie bei einem Europäischen Call mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsgleichung

$$C_t(k) = (qC_{t+1}(k+1) + (1-q)C_{t+1}(k))/R ,$$

wobei

$$q = \frac{R-D}{U-D} = \frac{1{,}1-0{,}9}{1{,}2-0{,}9} = 2/3 .$$

Im Dividendenzeitpunkt ist der Wert der Europäischen Option mit dem Ausübungswert zu vergleichen. Die Werte vor dem Dividendenzeitpunkt können dann wiederum durch Rückwärtsrechnung bestimmt werden, wobei im Falle

Amerikanischer Optionen die möglicherweise höheren Ausübungswerte berücksichtigt werden müssen.

Beispielsweise errechnet man für den Wert eines Europäischen Calls in $t = 3$ nach 3 Upticks:

$$C_3(3) = \left[\frac{2}{3}536{,}8 + \frac{1}{3}277{,}6\right]/1{,}1 = 409{,}45\,.$$

Der Ausübungswert der Kaufoption ist in diesem Knoten jedoch

$$S^{ex} + PV(DIV) - K = 864 + 50 - 500 = 414\,,$$

so dass man für den Wert eines Amerikanischen Calls

$$C_3^a(3) = \max\{0; 414; 409{,}45\} = 414$$

erhält. Für den Knoten $t = 3$, $k = 1$ berechnet man analog den Wert eines Europäischen Calls mit

$$C_3(1) = \left[\frac{2}{3}83{,}2 + \frac{1}{3}0\right]/1{,}1 = 50{,}42$$

bei einem Ausübungswert von

$$S^{ex} + PV(DIV) - K = 486 + 50 - 500 = 36\,.$$

Der Wert eines Amerikanischen Calls resultiert in diesem Fall nicht aus dem Wert bei vorzeitiger Ausübung, sondern ergibt sich aus dem Wert eines entsprechenden Europäischen Calls:

$$C_3^a(1) = \max\{0; 36; 50{,}42\} = 50{,}42\,.$$

Die Call-Werte in $t = 0{,}1{,}2$ ergeben sich schließlich durch Rückwärtsrechnung mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsgleichung wie aus Abbildung L.27 zu ersehen ist.

10.5. (a), (b) Gegeben sind $U = 1{,}1$ und $D = 0{,}9$. Die risikolose Wahrscheinlichkeit errechnet sich im Binomialmodell für Devisenoptionen aus

$$q = \frac{\frac{B^*(T/n)}{B(T/n)} - D}{U - D}\,,$$

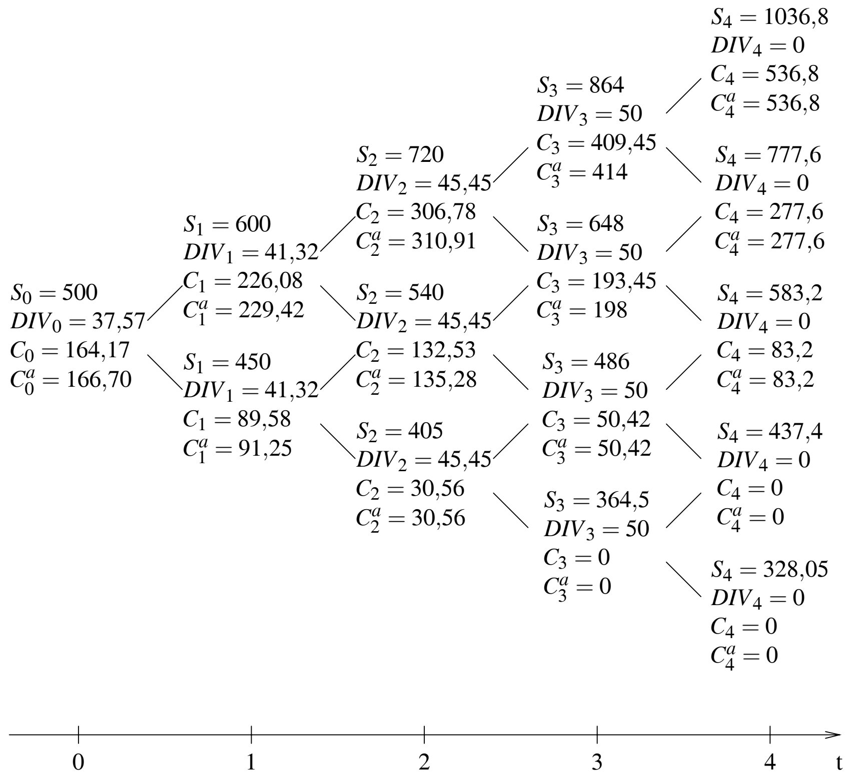
wobei

$$B(T/n) = (1+r)^{-1} = 0{,}9434 \quad \text{und} \quad B^*(T/n) = (1+r^*)^{-1} = 0{,}9804\,,$$

da eine diskrete Verzinsung vorausgesetzt wurde und die Periodenlänge ein halbes Jahr beträgt. Also ergibt sich $q = 0{,}31$ und $1 - q = 0{,}69$. Damit lassen sich die Call-Werte aus einem Binomialbaum wie in Abbildung L.28 bestimmen:

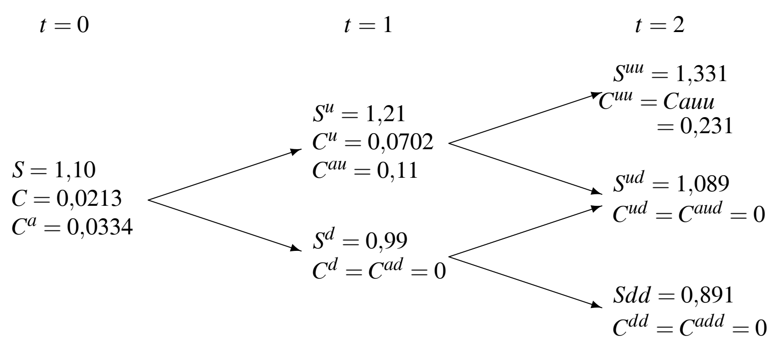
Es ist zu beachten, dass der Ausübungswert der Amerikanischen Option im Upstate in t=1 höher liegt als der Wert der Europäischen Option. Deswegen resultiert auch ein höherer Wert der Amerikanischen Option in $t = 0$.

Abb. L.27. *Aufgabe 10.4: Bewertung eines Amerikanischen Calls mit Dividenden.*



(c) Es wird davon ausgegangen, dass die Anlage/Aufnahme in Fremd- bzw. Inlandswährung nicht in Bonds, sondern mittels eines Termingelds oder

Abb. L.28. *Aufgabe 10.5.a,b.*



eines Kredits erfolgt. Dies bedeutet, dass sich die Anteile h^B bzw. h^{B^*} an Inlands- bzw. Fremdwährung im Duplikationsportfolio auf Nennwerte und nicht auf abgezinste Werte beziehen. Dann ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} C^u &= (1+r^*)h^{B^*}S^u + (1+r)h^B \ , \\ C^d &= (1+r^*)h^{B^*}S^d + (1+r)h^B \ . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für die gesuchte Dollaranlage

$$h^{B^*} = \frac{C^u - C^d}{(1+r^*)(S^u - S^d)} = 0{,}3191 \ ,$$

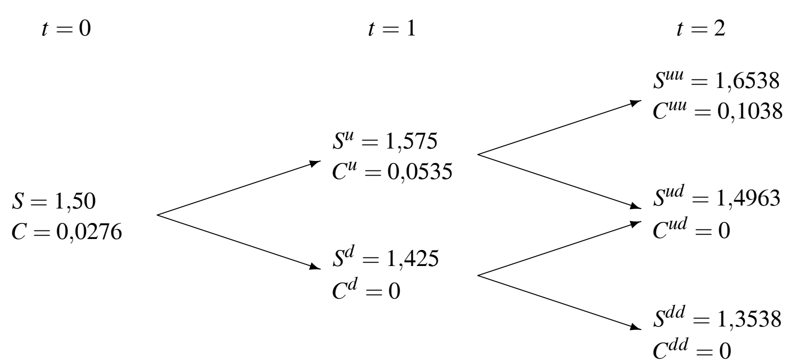
d. h. es müssen 0,3010 Dollars gekauft werden.
Um den Dollar im Downstate in $t = 1$ zu duplizieren steht der Call und eine Anlage in Inlandswährung zur Verfügung. Der Call ist jedoch wertlos und liefert dementsprechend eine Rückzahlung in $t = 2$ von null. Eine Anlage von EUR 1 in Inlandswährung in $t = 1$ führt zu einem sicheren Rückfluss von EUR $(1+r)$ in $t = 2$. Also lassen sich durch Kombination von Call und Anlage in Inlandswährung nur sichere Zahlungen duplizieren. Da der Dollarkurs jedoch auf 1,089 steigen bzw. auf 0,891 fallen kann, ist eine Duplikation durch Call und Anlage in Inlandswährung nicht möglich.

10.6. (a), (b) Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\frac{B^*(T/n)}{B(T/n)} - D}{U - D} = \frac{\frac{1+0{,}25\cdot 0{,}07}{1+0{,}25\cdot 0{,}06} - 0{,}95}{1{,}05 - 0{,}95} = 0{,}5246 \ , \\ 1 - q &= 0{,}4754 \ . \end{aligned}$$

Dann errechnet sich der Wert des Europäischen Calls mit Hilfe von folgendem Binomialbaum:

Abb. L.29. *Aufgabe 10.6.a,b.*



Zur Berechnung des Amerikanischen Call-Werts ist zu überprüfen, ob sich vorzeitige Ausübung des Calls im Zeitpunkt $t = 1$ lohnt. Im Upstate beträgt der Ausübungswert EUR 0,025, im Downstate null. Da in beiden Fällen der Ausübungswert nicht größer als der Wert des Europäischen Calls ist, haben beide Derivate den gleichen Wert.
Eine vorzeitige Ausübung ist auf jeden Fall nicht sinnvoll, wenn die Europäische Wertuntergrenze über dem Ausübungswert liegt, d. h.

$$SB^*_{0,25}(0{,}5) - KB_{0,25}(0{,}5) > S - K\ .$$

Hieraus ergibt sich für positive Zinssätze

$$S < K\frac{1 - B_{0,25}(0{,}5)}{1 - B^*_{0,25}(0{,}5)} = 1{,}55\frac{1 - 0{,}9828}{1 - 0{,}9852} = 1{,}8014\ .$$

Also ist vorzeitige Ausübung bis zu einem Kurs von 1,8014 EUR/GBP nicht sinnvoll.

Lösungen zu Kapitel 11

11.1. Der BMS-Preis einer Option hängt von 5 Einflussfaktoren ab, deren Wirkung auf den Call- bzw. Put-Preis in der nachfolgenden Tabelle angegeben ist.

Einflussfaktor			Call	Put
Aktienkurs	S	Δ	$\partial C/\partial S > 0$	$\partial P/\partial S < 0$
Basispreis	K		$\partial C/\partial K < 0$	$\partial P/\partial K > 0$
Volatilität	σ	Vega	$\partial C/\partial \sigma > 0$	$\partial P/\partial \sigma > 0$
Zins	r	ρ	$\partial C/\partial r > 0$	$\partial P/\partial r < 0$
Zeit	T	Θ	$\partial C/\partial T > 0$	$\partial P/\partial T \geq\leq 0$

Anmerkung: Im Rahmen des Risikomanagements ist neben den Sensitivitäten Delta, Vega und Theta vor allem das Gamma von Bedeutung:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} .$$

Die Wirkungsweise der Einflussfaktoren lässt sich durch partielle Ableitung der Black-Scholes-Preisformel ermitteln, soll an dieser Stelle jedoch nur ökonomisch plausibilisiert werden.

	Call	Put
S	Je höher der Aktienkurs, desto größer ist der Wert des Rechtes, die Aktie zum Basispreis zu kaufen.	Je höher der Aktienkurs, desto geringer ist der Wert des Verkaufsrechtes.
K	Je höher der Ausübungspreis, desto geringer ist der Wert des Rechtes zu diesem Preis zu kaufen.	Je höher der Ausübungspreis, desto höher ist der Wert des Rechtes zu diesem Preis zu verkaufen.
σ	Aufgrund des begrenzten Verlustpotentials, aber unbegrenzten Gewinnpotentials wirkt eine Erhöhung der Volatilität wertsteigernd.	Auch beim Put wirkt eine Erhöhung der Volatilität wertsteigernd.
r	Je höher der Zins, desto größer ist der Zinsvorteil des Calls gegenüber der Aktie (NB: $C \geq (S - K\mathrm{e}^{-rT})^+$)	Je höher der Zins, desto größer ist der Zinsnachteil des Pus gegenüber der Aktie (NB: $P \geq (K\mathrm{e}^{-rT} - S)^+$)
T	Die Volatilität steigt mit $\sqrt{T}$. Da auch der Zinseffekt mit der Restlaufzeit wertsteigernd wirkt, steigt der Wert eines Europäischen Calls mit T.	Beim Europäischen Put kompensieren sich der wertsteigernde Volatilitätseffekt und der wertsenkende Zinseffekt. Das Vorzeichen ist daher nicht eindeutig bestimmt.

11.2. (a) Der theoretische Wert des *Europäischen Calls* nach dem Modell von Black, Merton und Scholes entspricht:

$$C = SN(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT}N(d_2)510 \cdot 0{,}6273 - 500\mathrm{e}^{-0{,}05\frac{1}{3}} \cdot 0{,}5716 = 38{,}8615,$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = 0{,}3248\,,$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}1805\,.$$

Die Wahrscheinlichkeiten $N(d_1)$ und $N(d_2)$ sind einer Normalverteilungstabelle zu entnehmen:

$$N(d_1) = 0{,}6273\,,$$
$$N(d_2) = 0{,}5716\,.$$

(b) Da keine Dividenden gezahlt werden, hat der *Amerikanische Call* den gleichen Modellwert wie der Europäische Call:

$$C^a = C = 38{,}8615\,.$$

(c) Der *Europäische Put* hat den theoretischen Wert:

$$\begin{aligned} P &= K\mathrm{e}^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \\ &= K\mathrm{e}^{-rT}(1 - N(d_2)) - S(1 - N(d_1)) = 20{,}5972\,. \end{aligned}$$

(d) Die *Put-Call-Parität* wird bestätigt, indem wir mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben (a) bis (c) die Put-Call-Parität nachrechnen:

$$C - S + K\mathrm{e}^{-rT} = 38{,}8015 - 510 + 500\mathrm{e}^{-0{,}05\frac{1}{3}} = 20{,}5972 = P\,.$$

11.3. (a) Mit $h^{S,0} = 100$ sei die Anzahl der Daimler-Aktien und mit $h^{C,0} = -153{,}51$ die Anzahl der Calls bezeichnet. Im Zeitpunkt $t = 0$ hat der Call einen Wert von

$$C = SN(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT}N(d_2) = 70{,}25\,,$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = 0{,}3892\,,$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}2124\,,$$
$$N(d_1) = 0{,}6514\,,$$
$$N(d_2) = 0{,}5841\,.$$

Daraus folgt für den Portefeuillewert:

$$PF_0 = h^{C,0}C + h^{S,0}S = -153{,}51 \cdot 70{,}25 + 100 \cdot 720 = 61\,215{,}92\,.$$

Anmerkung: Das Portefeuille des Investors ist deltaneutral, denn aus

$$N(d_1) = \frac{\partial C}{\partial S} \approx \frac{\Delta C}{\Delta S}$$

folgt, dass ein Portefeuille bestehend aus einer Aktie und $-1/N(d_1)$ Calls gegen kleine Aktienkursänderungen abgesichert ist:

$$\Delta S - \frac{1}{N(d1)} \cdot \Delta C \approx 0\,.$$

Zur Absicherung von 100 Aktien werden entsprechend

$$h^{C,0} = -\frac{100}{N(d_1)} = -\frac{100}{0{,}6514} = -153{,}51$$

Calls benötigt (Short Position).

(b) Nach einer Woche hat der Call einen Wert von

$$C_1 = S_1 N(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT} N(d_2) = 82{,}54609\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = 0{,}545923\,,\\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}372579\,,\\ N(d_1) &= 0{,}707441\,,\\ N(d_2) &= 0{,}645269\,. \end{aligned}$$

Um 100 Aktien zu hedgen werden nun:

$$h^{C,1} = -\frac{100}{N(d_1)} = -\frac{100}{0{,}707441} = -141{,}355$$

Calls benötigt. Der Investor muss also

$$h^1 - h^0 = -141{,}355 + 153{,}51 = 12{,}155$$

Calls zurückkaufen zum Preis von $C_1 = 82{,}5460$. Die resultierenden Anpassungskosten in Höhe von

$$(h^{C,1} - h^{C,0})C_1 = 12{,}155 \cdot 82{,}54609 = 1\,003{,}39$$

können beispielsweise durch einen Kredit (zum risikolosen Zins) finanziert werden.

(c) Nach zwei Wochen hat der Call einen Wert von

$$C_2 = S_2 N(d_1) - K\mathrm{e}^{rT} N(d_2) = 61{,}28314\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = 0{,}304311\,,\\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}1334469\,,\\ N(d_1) &= 0{,}61955 \Rightarrow h^{C,2} = -\frac{100}{0{,}6125} = -161{,}406\,,\\ N(d_2) &= 0{,}553484\,. \end{aligned}$$

Beurteilung der Absicherungsstrategie:

Die Wertänderungen, die sich in den zwei Wochen aus der Aktien- und Call-Position ergeben, sind in Tabelle L.2 dargestellt. Die Wertänderungen ergeben sich jeweils aus der Anzahl der Aktien (bzw. Calls) am Periodenanfang, multipliziert mit der Preisdifferenz zwischen Periodenanfang und -ende. Für die Wertänderung der Call-Position in $t = 1$ erhält man beispielsweise:

$$-153{,}510 \cdot (82{,}546 - 70{,}250) = -1\,887{,}573\,.$$

Der Anstieg des Call-Preises führt also zu einem Verlust von 1 887,573 .

Zur Beurteilung des Erfolgs der Anlagestrategie (vgl. Tabelle L.3) muss die Auszahlung für die Umschichtungsmaßnahme in $t = 1$ berücksichtigt werden. Die Alternativanlage in Bonds ist in der Tabelle mit kontinuierlicher Verzinsung gerechnet. Die Anlage des Portefeuillewertes in Höhe von $-61\,215{,}923$ zum risikolosen Zins für eine Woche liefert demzufolge:

$$61\,215{,}923 \cdot \mathrm{e}^{0{,}05\frac{1}{52}} = 61\,274{,}812\,.$$

In der 1. Woche steigt der PF-Wert überproportional (relativ zu einer riskikolosen Anlage). Der Gewinn in der Aktienposition wird zwar gedämpft durch den Verlust in der Call Position, übersteigt jedoch die risikolose Verzinsung, die ein *perfekt* gehedgtes PF erzielen sollte.

In der 2. Woche steigt der PF-Wert, jedoch mit einer geringeren Rate als dem risikolosen Zins. Der Verlust in der Aktienposition wird zwar gemildert durch einen Gewinn in der Call Position, wird jedoch nicht vollständig kompensiert (relativ zu einer risiklosen Anlage).

Im Gesamtzeitraum schneidet das Portefeuille schlechter als die risiklose Anlage (Bond 3) ab.

Ursache: Um das PF in $t = 1$ erneut zu hedgen, ist der Rückkauf von Calls zu einem höheren Preis erforderlich. Allgemein gilt, dass bei diskreter Anpassung des Portefeuilles stets Calls zurückgekauft werden müssen, falls der Aktienkurs und damit der Call-Preis gestiegen ist, und umgekehrt zusätzlich Calls short verkauft werden müssen, falls der Aktienkurs und damit der Call-Preis gefallen ist.

Tabelle L.2. *Wertänderungen.*

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
Aktienkurs S	720	740	710
änderung ΔS		20	-30
Anzahl Aktien	100	100	0
Wertänderung		2 000	$-3\,000$
Call-Preis C	70,250	82,546	61,283
änderung ΔC		12,296	$-21{,}263$
Anzahl Calls	$-153{,}510$	$-141{,}355$	0
Wertänderung		$-1\,887{,}573$	3 005,615

Tabelle L.3. *Erfolg der Anlage-Strategie.*

CF	$t=0$	$t=1$ vor Umschichtung	$t=1$ nach Umschichtung	$t=2$
Aktien	$-72\,000$	$+74\,000$	$-74\,000$	$71\,000$
Calls	$+10\,784{,}08$	$-12\,671{,}650$	$+11\,668{,}265$	$-8\,662{,}650$
Kredit	0	0	$+1\,003\,385$	$-1\,004{,}351$
PF	$-61\,215{,}92$	$+61\,328{,}350$	$-61\,328{,}350$	$+61\,332{,}999$
Bond 1	$-61\,215{,}923$	$61\,274{,}812$	0	0
Bond 2	0	0	$-61\,328{,}350$	$+61\,387{,}348$
Bond 3	$-61\,215{,}923$	0	0	$+61\,333{,}759$

Die Black/Scholes-Formel basiert auf der Duplikation des Calls durch ein zeitkontinuierlich angepasstes Portefeuille aus Aktien und Bonds. Bei diskreter Anpassung des Portefeuilles ist diese Duplikationsstrategie nicht mehr risikolos, und es ergibt sich eine Abweichung von der risikolosen Anlage in Bonds.

Anmerkung: Üblicherweise werden zur Absicherung von Aktienportefeuilles Verkaufsoptionen verwendet, da mit diesen im Gegensatz zu Kaufoptionen das Verlustrisiko begrenzt werden kann, ohne dass eine kontinuierliche Anpassung des Portefeuilles notwendig ist.

11.4. (a) (i) Die Black/Merton/Scholes-Formel für einen Europäischen Call lautet:

$$C = SN(d_1) - KN(d_2)\exp(-rT)\ ,$$

wobei

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + 0{,}5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\ , \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}\ . \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich für das Delta eines Calls, d. h. die erste partielle Ableitung des Call-Wertes bzgl. des Aktienkurses, bzw. für das Gamma eines Calls, d. h. die zweite partielle Ableitung des Call-Wertes bzgl. des Aktienkurses, folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \text{Delta} &= C_S = N(d_1)\ , \\ \text{Gamma} &= C_{SS} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}\ . \end{aligned}$$

Einsetzen von $S = 55$, $\sigma = 0{,}2$, $r = 0{,}05$ und der Spezifikationen $K = 50$ und $T = 1$ des ersten Calls liefert:

$$d_1 = 0{,}8266\ , \quad d_2 = 0{,}6266\ , \quad N(d_1) = 0{,}7958\ , \quad N(d_2) = 0{,}7345$$

$$C^{(1)} = 8{,}8315\ , \quad \text{Delta} = C_S^{(1)} = 0{,}7958\ , \quad \text{Gamma} = C_{SS}^{(1)} = 0{,}0258\ .$$

Für den Call mit den Spezifikationen $K = 55$ und $T = 1/2$ erhält man:

$$d_1 = 0{,}2475\ , \quad d_2 = 0{,}1061\ , \quad N(d_1) = 0{,}5977\ , \quad N(d_2) = 0{,}5422\ ,$$

$$C^{(2)} = 3{,}7888\ , \quad \text{Delta} = C_S^{(2)} = 0{,}5977\ , \quad \text{Gamma} = C_{SS}^{(2)} = 0{,}0497\ .$$

(ii) Die Black/Merton/Scholes-Formel für einen Europäischen Put lautet:

$$P = KN(-d_2)\exp(-rT) - SN(-d_1)\ ,$$

wobei d_1 und d_2 wie bei einem Call berechnet werden. Hieraus ergeben sich Delta und Gamma eines Puts:

$$\begin{aligned} \text{Delta} &= P_S = N(d_1) - 1\ , \\ \text{Gamma} &= P_{SS} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}\ . \end{aligned}$$

Offensichtlich ist das Gamma eines Puts also gleich dem Gamma eines Calls.

Einsetzen von $S = 55$, $K = 50$ und $T = 1$ liefert unter Verwendung der in (i) berechneten Werte für $N(d_1)$ und $N(d_2)$ (beachte: $N(-x) = 1 - N(x)$) für den ersten Put:

$$P^{(1)} = 1{,}3929,\ \text{Delta} = P_S^{(1)} = -0{,}2042 \text{ und Gamma} = P_{SS}^{(1)} = 0{,}0258\ .$$

Für den Put mit Basispreis $K = 55$ und einer Restlaufzeit von $T = 1/2$ errechnet man:

$$P^{(2)} = 2{,}4308,\ \text{Delta} = P_S^{(2)} = -0{,}4023 \text{ und Gamma} = P_{SS}^{(2)} = 0{,}0497\ .$$

(b) Eine Absicherungsstrategie wird als *selbstfinanzierend* bezeichnet, wenn der Wert des Portefeuilles sich nicht durch die Umschichtung ändert. Dies bedeutet, dass das Hinzufügen der Optionen mit Basispreis $K = 55$ keine Kosten verursachen darf, d. h. es ist folgende Gleichung einzuhalten:

$$h^{C^{(2)}} C^{(2)} + h^{P^{(2)}} P^{(2)} = 0\ .$$

Außerdem soll das Portefeuille nach Absicherung deltaneutral sein, d. h.:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = V_S = h^{C^{(1)}} C_S^{(1)} + h^{P^{(1)}} P_S^{(1)} + h^{C^{(2)}} C_S^{(2)} + h^{P^{(2)}} P_S^{(2)} \stackrel{!}{=} 0\ .$$

Setzt man die Werte aus a) in die beiden Gleichungen ein, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= 3{,}7888 h^{C^{(2)}} + 2{,}4308 h^{P^{(2)}}\ , \\ -59{,}16 &= 0{,}5977 h^{C^{(2)}} - 0{,}4023 h^{P^{(2)}}\ . \end{aligned}$$

Als Lösung resultiert $h^{C^{(2)}} = -48{,}3$ und $h^{P^{(2)}} = 75{,}28$.

11.5. (a) Wie in der vorangegangenen Aufgabe errechnet man Black/Merton/Scholes-Wert, Delta und Gamma der Call-Optionen und erhält für den Call mit Basispreis $K = 250$ und Restlaufzeit $T = 1$:

$$d_1 = 1{,}2616\,, \quad d_2 = 1{,}0616\,, \quad N(d_1) = 0{,}8965\,, \quad N(d_2) = 0{,}8558\,,$$

$$C^{(1)} = 65{,}4226\,, \quad \text{Delta} = C_S^{(1)} = 0{,}8965\,, \quad \text{Gamma} = C_{SS}^{(1)} = 0{,}003\,.$$

Das Theta des Calls ist die Ableitung des Call-Wertes nach der Restlaufzeit und berechnet sich gemäß folgender Formel:[5]

$$\frac{\partial C}{\partial T} = C_T = \frac{N'(d_1)S\sigma}{2\sqrt{T}} + rK\mathrm{e}^{-rT}N(-d_2)\,.$$

Für obigen Call erhält man $C_T = 15{,}5759$. Für den Call mit Basispreis $K = 300$ und Restlaufzeit $T = 1/2$ errechnet man analog:

$$d_1 = 0{,}2475\,, \quad d_2 = 0{,}1061\,, \quad N(d_1) = 0{,}5977\,, \quad N(d_2) = 0{,}5422\,,$$

$$C^{(2)} = 20{,}6662\,, \quad \text{Delta} = C_S^{(2)} = 0{,}5977\,,$$

$$\text{Gamma} = C_{SS}^{(2)} = 0{,}0091\,, \quad C_T^{(2)} = 24{,}3479\,.$$

Für den Put mit Basispreis $K = 350$ und Restlaufzeit $T = 1/2$ erhält man:

$$d_1 = -0{,}8425\,, \quad d_2 = -0{,}9839\,, \quad N(-d_1) = 0{,}8003\,, \quad N(-d_2) = 0{,}8374\,,$$

$$P = 45{,}7876\,, \quad \text{Delta} = P_S = -0{,}8003\,, \quad \text{und} \quad \text{Gamma} = P_{SS} = 0{,}0066\,.$$

Das Theta eines Europäischen Puts lautet:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{N'(d_1)S\sigma}{2\sqrt{T}} - rK\mathrm{e}^{-rT}N(-d_2) = -2{,}4244\,.$$

Das Theta eines Europäischen Puts kann also im Gegensatz zum Europäischen Call negativ sein.

(b) Wie in der vorangegangenen Aufgabe bedeutet selbstfinanzierend, dass der Wert eines Portefeuilles sich durch Umschichtungen nicht ändert. Also muss gelten

$$V = S + h^{C^{(1)}}C^{(1)} + h^{C^{(2)}}C^{(2)} + h^P P \stackrel{!}{=} 0\,,$$

wobei gemäß der Aufgabenstellung $h^S = 1$ gesetzt wird.

Damit das Portefeuille Delta- und Gamma-neutral ist, muss gelten

$$\begin{aligned} V_S &= 1 + h^{C^{(1)}}C_S^{(1)} + h^{C^{(2)}}C_S^{(2)} + h^P P_S \stackrel{!}{=} 0\,, \\ V_{SS} &= \phantom{1 +{}} h^{C^{(1)}}C_{SS}^{(1)} + h^{C^{(2)}}C_{SS}^{(2)} + h^P P_{SS} \stackrel{!}{=} 0\,. \end{aligned}$$

Also ist ein Gleichungssystem in den Variablen $h^{C^{(1)}}$, $h^{C^{(2)}}$ und h^P zu lösen. Man errechnet $h^{C^{(1)}} = -4{,}2689$, $h^{C^{(2)}} = 2{,}5703$ und $h^P = -1{,}6126$.

[5] Man beachte, dass an dieser Stelle mit C_T die partielle Ableitung nach der Restlaufzeit bezeichnet wird.

(c) Für das Portefeuille-Theta gilt:

$$V_T = h^{C^{(1)}} C_T^{(1)} + h^{C^{(2)}} C_T^{(2)} + h^P P_T = 0\,.$$

(d) Die Black/Scholes-Differentialgleichung für einen Europäischen Call lautet:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S - rC + C_T = 0\,.$$

Diese Differentialgleichung gilt jedoch nicht nur für den Call, sondern für jedes andere Derivat bzgl. der gleichen Aktie. Da man ein Portefeuille von Derivaten ebenfalls wieder als Derivat auffassen kann, muss also auch das selbstfinanzierende Portefeuille aus (a) diese Differentialgleichung erfüllen. Damit gilt:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV + V_T = 0\,.$$

Außerdem ist das Portefeuille so zusammengestellt, dass sowohl der Wert V als auch das Delta V_S und das Gamma V_{SS} null sind. Hieraus folgt jedoch $V_T = 0$.

Lösungen zu Kapitel 12

12.1. (a) Aus der Modellierung der Kassazinsraten im Modell von Black, Derman und Toy durch $\ln(r_{t+1}) = \ln(r_t) + \mu_t + \sigma W_t$ folgt, dass die Kassazinsraten in $t+1$ wie folgt bestimmt werden:

$$r_{t+1} = \exp(\ln(r_{t+1})) = r_t \cdot \exp(\mu_t + \sigma W_t)\,.$$

Damit ergibt sich folgender Baum:

Abb. L.30. *Aufgabe 12.1: Pfade der Kassazinsrate im BDT-Modell.*

$$r_0 = 0{,}05$$

$$r_1^d = r_0 \cdot \exp(\mu_0 + \sigma) = 0{,}05 \cdot \exp(0{,}1 + 0{,}2) = 0{,}0675$$

$$r_1^u = r_0 \cdot \exp(\mu_0 - \sigma) = 0{,}05 \cdot \exp(0{,}1 - 0{,}2) = 0{,}0452$$

$$r_2^{dd} = r_1^d \cdot \exp(\mu_1 + \sigma) = 0{,}0675 \cdot \exp(0{,}15 + 0{,}2) = 0{,}0958$$

$$r_2^{ud} = r_1^d \cdot \exp(\mu_1 - \sigma) = 0{,}0675 \cdot \exp(0{,}15 - 0{,}2) = 0{,}0642$$

$$r_2^{uu} = r_1^u \cdot \exp(\mu_1 - \sigma) = 0{,}0452 \cdot \exp(0{,}15 - 0{,}2) = 0{,}0430$$

(b) Mit Hilfe der Kassazinsraten ist nun eine arbitragefreie Modellierung der Preise für Null-Kuponanleihen möglich:

Abb. L.31. *Aufgabe 12.1: Preispfade der Zeros im BDT-Modell.*

$$\begin{aligned} B_0(0) &= 100\\ B_0(1) &= 100\,\mathrm{e}^{-r_0}\\ &= 95{,}12\\ B_0(2) &= \frac{B_1^d(2)+B_1^u(2)}{2}\mathrm{e}^{-r_0}\\ &= 89{,}91\\ B_0(3) &= \frac{B_1^d(3)+B_1^u(3)}{2}\mathrm{e}^{-r_0}\\ &= 84{,}13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^d(1) &= 100\\ B_1^d(2) &= 100\,\mathrm{e}^{-r_1^d}\\ &= 93{,}47\\ B_1^d(3) &= \frac{B_2^{dd}(3)+B_2^{du}(3)}{2}\mathrm{e}^{-r_1^d}\\ &= 86{,}19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^u(1) &= 100\\ B_1^u(2) &= 100\,\mathrm{e}^{-r_1^u}\\ &= 95{,}58\\ B_1^u(3) &= \frac{B_2^{ud}(3)+B_2^{du}(3)}{2}\mathrm{e}^{-r_1^u}\\ &= 90{,}60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^{dd}(2) &= 100\\ B_2^{dd}(3) &= 100\mathrm{e}^{-r_2^{dd}}\\ &= 90{,}86 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^{du}(2) &= 100\\ B_2^{du}(3) &= 100\mathrm{e}^{-r_2^{ud}}\\ &= 93{,}78 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^{uu}(2) &= 100\\ B_2^{uu}(3) &= 100\mathrm{e}^{-r_2^{uu}}\\ &= 95{,}79 \end{aligned}$$

(c) Die Modellierung des Bond-Preises analog zu der Modellierung eines Aktienkurses im Binomialmodell sieht wie folgt aus:

Abb. L.32. *Aufgabe 12.1: Preispfade eines Zeros im BSM-Modell.*

$$B_0(2) = 89{,}92 \quad\to\quad B_1^u(2) = 98{,}91,\; B_1^d(2) = 80{,}93$$

$$B_1^u(2) = 98{,}91 \to 108{,}80,\; 89{,}02 \qquad B_1^d(2) = 80{,}93 \to 89{,}02,\; 72{,}84$$

(d) In der Modellierung des Bond-Preises analog zur Modellierung eines Aktienkurses endet der Bond nicht immer mit dem Wert 100. Im Zinsstrukturmodell von Black/Derman/Toy endet der Bond am Ende seiner Laufzeit mit dem einzigen plausiblen Wert 100.

(e) Da im Modell von Black/Derman/Toy der Bond in $t = 2$ bei 100 endet, ist die Call-Option auf den Bond wertlos, d. h. $C_0 = 0$. In der Modellierung des Bond-Preises nach Black/ Scholes gilt $B_2^{uu}(2) > 100 = K$, so dass der Wert der Option in $t = 0$ positiv sein muss. Deshalb ist die Modellierung nach Black/Merton/Scholes nicht geeignet, falls die Laufzeit des Bond ungefähr gleich der Laufzeit des Calls ist.

12.2. Ziel der Aufgabe ist die Bestimmung des Wertes eines Calls auf eine Null-Kuponanleihe mit $T = 3$. Dazu soll eine arbitragefreie Modellierung der Entwicklung des Preises der Null-Kuponanleihe benutzt werden. Ein Möglichkeit dazu ist, die Terminzinsraten mit dem Ho/Lee-Modell zu modellieren. Die Idee dabei besteht darin, bei der Enwicklung der Bond-Preise die Arbitragefreiheit zu verwenden. Dies impliziert, dass diese in jedem Knoten als diskontierte risikoneutrale Erwartungswerte darstellbar sind.

Um eine einfachere Rechnung zu ermöglichen, geht man davon aus, dass $q = (1-q) = \frac{1}{2}$ gilt. Um dann bei der Modellierung die Arbitragefreiheit der Bond-Preise zu sichern, müssen nun die Parameter μ gemäß Eigenschaft 12.6 wie folgt aussehen (Kalibrierung des Modells):

$$\sum_{n=1}^{\bar{n}} \mu_t(t+n) = \ln(\cosh(\bar{n}\sigma)),\ n = 1,2,\ldots,N-1,$$

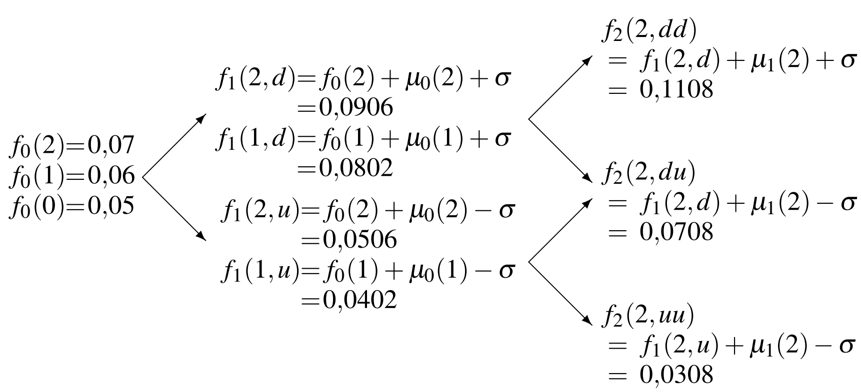
wobei N der Anzahl der Perioden des Modells entspricht. Hier ist $N = 3$, also betrachte man $n = 1$, $n = 2$

$$\begin{aligned}
t = 0 : n = 1 : \mu_0(1) &= \ln(\cosh(\sigma)) = 0{,}0002 \\
n = 2 : \mu_0(2) &= \ln(\cosh(2\sigma)) - \mu_0(1) \\
&= 0{,}0008 - 0{,}0002 = 0{,}0006 \\
t = 1 : n = 1 : \mu_1(2) &= \ln(\cosh(\sigma)) = 0{,}0002
\end{aligned}$$

Die *Forward-Rates* in $t = 0$ lassen sich aus den aktuellen Bond-Preisen berechnen:

$$\begin{aligned}
f_0(0) &= \ln(B_0(1)) = 0{,}05\ , \\
f_0(1) &= \ln(B_0(1)/B_0(2)) = \ln(B_0(1)) - ln(B_0(2)) = 0{,}06\ , \\
f_0(2) &= \ln(B_0(2)/B_0(3)) = \ln(B_0(2)) - ln(B_0(3)) = 0{,}07\ .
\end{aligned}$$

Abb. L.33. *Aufgabe 12.2: Pfade der Terminzinsraten.*



Mit den Forward-Rates ist die Modellierung der *Terminzinsratenentwicklung nach Ho/Lee* möglich (vergleiche Abbildung L.33). Mit Hilfe der Terminzinsraten lassen sich retrograd die Preise der Null-Kuponanleihen bestimmen.

Abb. L.34. *Aufgabe 12.2: Preispfade eines Zeros im Ho/Lee-Modell.*

$$B_0(3) = \tfrac{0{,}8430+0{,}9132}{2}\,\mathrm{e}^{-0{,}05} = 0{,}8353$$

$$B_1(3,u) = \tfrac{0{,}9316+0{,}9697}{2}\,\mathrm{e}^{-0{,}0402} = 0{,}9132$$

$$B_1(3,d) = \tfrac{0{,}8951+0{,}9316}{2}\,\mathrm{e}^{-0{,}0802} = 0{,}8430$$

$$B_2(3,uu) = \mathrm{e}^{-0{,}0308} = 0{,}9697$$

$$B_2(3,du) = \mathrm{e}^{-0{,}0708} = 0{,}9316$$

$$B_2(3,dd) = \mathrm{e}^{-0{,}1108} = 0{,}8951$$

Auf der Basis der arbitragefreien Modellierung der Anleihe-Preise lässt sich folgende *Call-Preisentwicklung* verfolgen: Die risikoneutrale Bewertung des Calls

Abb. L.35. *Aufgabe 12.2: Preispfade eines Calls im Ho/Lee-Modell.*

$$C = \tfrac{0{,}0146+0{,}0487}{2}\,\mathrm{e}^{-0{,}05} = 0{,}0301$$

$$C_1(u) = \tfrac{0{,}0316+0{,}0697}{2}\,\mathrm{e}^{-0{,}0402} = 0{,}0487$$

$$C_1(d) = \tfrac{0+0{,}0316}{2}\,\mathrm{e}^{-0{,}0802} = 0{,}0146$$

$$C_2(uu) = (0{,}9697-0{,}90)^+ = 0{,}0697$$

$$C_2(du) = (0{,}9316-0{,}90)^+ = 0{,}0316$$

$$C_2(dd) = (0{,}8951-0{,}90)^+ = 0$$

auf diese Anleihe liefert also den gegenwärtigen Wert $C = 0{,}0301$.

12.3. (a) Wie in der vorherigen Aufgabe berechnen wir die Driftparameter:

$$\mu_0(1) = \mu_1(2) = \ln(\cosh(\sigma)) = 0{,}00045\,,$$
$$\mu_0(2) = \ln(\cosh(2\sigma)) - \mu_0(1) = 0{,}00135\,.$$

Mit den aktuellen Bond-Preisen lassen sich die Terminzinsraten in $t = 0$ bestimmen:

$$f_0(0) = \ln(1/B_0(1)) = 0{,}04\,,$$
$$f_0(1) = \ln(B_0(1)/B_0(2)) = 0{,}05\,,$$
$$f_0(2) = \ln(B_0(2)/B_0(3)) = 0{,}06\,.$$

Im nächsten Schritt werden die Terminzinsraten und die Preise der Null-Kuponanleihe bestimmt:

Abb. L.36. *Aufgabe 12.3: Pfade der Terminzinsraten und Zeros im Ho/Lee-Modell.*

$f_0(0) = 0{,}04$
$f_0(1) = 0{,}05$
$f_0(2) = 0{,}06$
$B_0(3) = 0{,}8607$

$f_1(1,u) = 0{,}02045$
$f_1(2,u) = 0{,}03135$
$B_1(3,u) = 0{,}9496$

$f_1(1,d) = 0{,}08045$
$f_1(2,d) = 0{,}09135$
$B_1(3,d) = 0{,}8421$

$f_2(2,uu) = 0{,}0018$
$B_2(3,uu) = 0{,}9982$

$f_2(2,du) = 0{,}0618$
$B_2(3,du) = 0{,}9401$

$f_2(2,dd) = 0{,}1218$
$B_2(3,dd) = 0{,}8853$

Für die Europäische Put-Option ergibt sich damit:

Abb. L.37. *Aufgabe 12.3: Preispfade eines Puts im Ho/Lee-Modell.*

$P = 0{,}0187$

$P^d = \frac{P^{dd}+P^{ud}}{2} B_1(2,d) = 0{,}0344$

$P^u = \frac{P^{ud}+P^{uu}}{2} B_1(2,d) = 0{,}0046$

$P^{dd} = (K - B_2(3,dd))^+ = 0{,}0647$

$P^{ud} = (K - B_2(3,ud))^+ = 0{,}0099$

$P^{uu} = (K - B_2(3,ud))^+ = 0$

(b) Im Falle einer Amerikanischen Option ergibt sich:

$$P^{ad} = \max\{P^d, K - B_1(3,d)\} = 0{,}0988 > P^d\,,$$
$$P^{au} = \max\{P^u, K - B_1(3,u)\} = 0{,}0046 = P^u\,,$$
$$P^a = \max\{\frac{P^{au}+P^{ad}}{2} B_0(1), K - B_0(3)\} = 0{,}0893 > P\,.$$

Der Wert der Amerikanischen Option ist also größer als der der Europäischen Option.

12.4. (a) Bei einer gegebenen Volatilität der Terminzinsraten von $\sigma = 0{,}02$ errechnen sich die Driftparameter mit:

$$\mu_0(1) = \cosh(0{,}02) - \mu_1(2) = 0{,}0002\,,$$
$$\mu_0(2) = \ln(\cosh(2\sigma)) - \mu_0(1) = 0{,}0006\,.$$

Daraus ergibt sich die in Abbildung L.38 dargestellte *Terminzinsratenentwicklung*

Abb. L.38. *Aufgabe 12.4: Pfade der Terminzinsraten im Ho/Lee-Modell.*

$f_0(2)=0{,}06$
$f_0(1)=0{,}05$
$f_0(0)=0{,}04$

$f_1(2,d)=f_0(2)+\mu_0(2)+\sigma =0{,}0806$
$f_1(1,d)=f_0(1)+\mu_0(1)+\sigma =0{,}0702$

$f_1(2,u)=f_0(2)+\mu_0(2)-\sigma =0{,}0406$
$f_1(1,u)=f_0(1)+\mu_0(1)-\sigma =0{,}0302$

$f_2(2,dd)=f_1(2,d)+\mu_1(2)+\sigma =0{,}1008$

$f_2(2,du)=f_1(2,d)+\mu_1(2)-\sigma =0{,}0608$

$f_2(2,uu)=f_1(2,u)+\mu_1(2)-\sigma =0{,}0208$

Mit Hilfe der Terminzinsraten läßt sich die *Bond-Preisentwicklung* berechnen, wie es in der Abbildung L.39 dargestellt ist.

(b) Die Kuponanleihe kann man als Portefeuille von Null-Kuponanleihen auffassen. Die Null-Kuponanleihen werden dann einzeln bewertet (die Diskontierung auf den Betrachtungszeitpunkt liefert die Bewertung der Kuponanleihe).

(c) Die Kuponanleihe mit dem Nennwert $F = 100$ und einem Kupon von $k = 6\,\%$ wird wie folgt bewertet:

$$\begin{aligned}
B_0^k &= (B_0(1)+B_0(2)+B_0(3))\cdot k\cdot F + B_0(3)\cdot F\\
&= 16{,}4124 + 86{,}07 = 102{,}48\,,\\
B_1^k(d) &= (B_1(2,d)+B_1(3,d))\cdot k\cdot F + B_1(3,d)\cdot F\\
&= 10{,}75 + 86 = 96{,}75\,,\\
B_1^k(n) &= (B_1(2,u)+B_1(3,u))\cdot k\cdot F + B_1(3,u)\cdot F\\
&= 11{,}41 + 93{,}16 = 104{,}57\,,\\
B_2^k(dd) &= B_2(3,dd)\cdot(1+k)\cdot F = 90{,}41\cdot 1{,}06 = 95{,}83\,,\\
B_2^k(ud) &= B_2(3,ud)\cdot(1+k)\cdot F = 94{,}10\cdot 1{,}06 = 99{,}75\,,\\
B_2^k(uu) &= B_2(3,uu)\cdot(1+k)\cdot F = 97{,}94\cdot 1{,}06 = 103{,}82\,.
\end{aligned}$$

Abb. L.39. *Aufgabe 12.4: Preispfade der Zeros im Ho/Lee-Modell.*

$$\begin{aligned} B_0(3) &= 0{,}8607 \\ B_0(2) &= 0{,}9139 \\ B_0(1) &= 0{,}9608 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1(3,d) &= \tfrac{0{,}9041+0{,}9410}{2}\mathrm{e}^{-f_1(1,d)} \\ &= 0{,}8600 \\ B_1(2,d) &= \mathrm{e}^{-f_1(1,d)} \\ &= 0{,}9322 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1(3,u) &= \tfrac{0{,}9410+0{,}9794}{2}\mathrm{e}^{-f_1(1,u)} \\ &= 0{,}9316 \\ B_1(2,u) &= \mathrm{e}^{-f_1(1,u)} \\ &= 0{,}9703 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(3,dd) &= \mathrm{e}^{-0{,}1008} \\ &= 0{,}9041 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(3,ud) &= \mathrm{e}^{-0{,}0608} \\ &= 0{,}9410 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(3,uu) &= \mathrm{e}^{-0{,}0208} \\ &= 0{,}9794 \end{aligned}$$

Auf der Basis der arbitragefreien Modellierung der Kuponanleihe läßt sich nun die Call-Preisentwicklung verfolgen:

Abb. L.40. *Aufgabe 12.4: Preispfade von Kuponanleihe und Call im Ho/Lee-Modell.*

$t = 0$ $\qquad$ $t = 1$

$$\begin{aligned} B_0^k &= 102{,}48 \\ C &= \tfrac{0+4{,}57}{2}\mathrm{e}^{-0{,}04} \\ &= 2{,}1954 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^k(d) &= 96{,}75 \\ C^d &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^k(u) &= 104{,}57 \\ C^u &= 4{,}57 \\ &= \max\{104{,}57 - 100; 0\} \end{aligned}$$

(d) Auf der Basis der arbitragefreien Modellierung der Kuponanleihe läßt sich nun auch die Preisentwicklung des Europäischen Puts verfolgen:

Abb. L.41. *Aufgabe 12.4: Preispfade von Kuponanleihe und Put im Ho/Lee-Modell.*