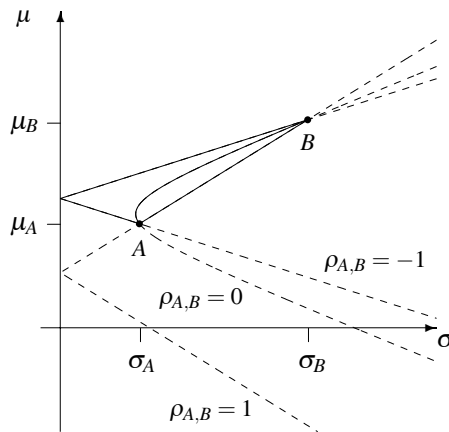


Lösungen zu Kapitel 5

5.1.


Abb. L.10. Aufgabe 5.1.

Auf den durchgezogenen Teilen der Kurven sind Portefeuilles positioniert, die sich, ohne Leerverkäufe zu tätigen, erreichen lassen. Für das Zusammenstellen der Portefeuilles auf den gestrichelten Teilstücken sind Leerverkäufe nötig.

- (a) Die Anteile x_A^{MVP} und x_B^{MVP} der Wertpapiere A und B am Minimum-Varianz-Portefeuille errechnen sich folgendermaßen:

$$x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}} \quad \text{und} \quad x_B^{\text{MVP}} = 1 - x_A^{\text{MVP}}.$$

Bei vollständig positiver Korrelation ($\rho_{A,B} = 1$) der Wertpapierrenditen lauten die Anteile am MVP:

$$x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_B(\sigma_B - \sigma_A)}{(\sigma_A - \sigma_B)^2} = \frac{\sigma_B}{\sigma_B - \sigma_A} \quad \text{und} \quad x_B^{\text{MVP}} = 1 - x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_A}{\sigma_A - \sigma_B}.$$

Offenbar sind die Portefeuilleanteile nicht definiert, wenn identische Volatilitäten vorliegen. Dies ausgeschlossen, können die folgenden beiden Fälle unterschieden werden:

$$\sigma_A > \sigma_B \Rightarrow x_A < 0 \quad \text{und} \quad \sigma_A < \sigma_B \Rightarrow x_B < 0.$$

D. h. zum Zusammenstellen des MVPs müssen auf jeden Fall Leerverkäufe getätigt werden. Sind Leerverkäufe verboten, so stellt dasjenige der beiden Wertpapiere mit der geringsten Volatilität das Minimum-Varianz-Portefeuille dar.

Bei vollständig negativer Korrelation ($\rho_{A,B} = -1$) der Wertpapierrenditen ergibt sich:

$$x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_B(\sigma_B + \sigma_A)}{(\sigma_A + \sigma_B)^2} = \frac{\sigma_B}{\sigma_B + \sigma_A} \quad \text{und} \quad x_B^{\text{MVP}} = 1 - x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_A}{\sigma_B + \sigma_A}.$$

Da die Volatilitäten σ_A und σ_B nicht negativ sind, müssen die Portefeuilleanteile x_A^{MVP} und x_B^{MVP} ebenfalls nicht negativ sein, d. h. das Minimum-Varianz-Portefeuille kann, ohne Leerverkäufe zu tätigen, erreicht werden.

D. h. bei Leerverkaufsverbot erhält man das gleiche Minimum-Varianz-Portefeuille wie wenn Leerverkäufe zugelassen sind.

Bei unkorrelierten Wertpapierrenditen ($\rho_{A,B} = 0$) gilt:

$$x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \quad \text{und} \quad x_B^{\text{MVP}} = 1 - x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}.$$

Da die Varianzen σ_A^2 und σ_B^2 naturgemäß nicht negativ sind, müssen die Portefeuilleanteile wieder nicht negativ sein. Auch hier kann das MVP ohne Leerverkäufe zu tätigen zusammengestellt werden. D. h. bei Leerverkaufsverbot erhält man das gleiche Minimum-Varianz-Portefeuille wie wenn Leerverkäufe zugelassen sind.

- (b) Die Varianz σ_P^2 eines aus den Wertpapieren A und B kombinierten Portefeuilles P lautet: $\sigma_P^2 = x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}$.

Für den Fall vollständig positiver Korrelation errechnet man für das Risiko des Minimum-Varianz-Portefeuilles daher:

$$(\sigma^{\text{MVP}})^2 = \frac{\sigma_B^2}{(\sigma_B - \sigma_A)^2} \sigma_A^2 + \frac{\sigma_A^2}{(\sigma_B - \sigma_A)^2} \sigma_B^2 - 2 \frac{\sigma_A^2 \sigma_B^2}{(\sigma_B - \sigma_A)^2} = 0.$$

Analog errechnet man bei vollständig negativer Korrelation:

$$(\sigma^{\text{MVP}})^2 = \frac{\sigma_B^2}{(\sigma_B + \sigma_A)^2} \sigma_A^2 + \frac{\sigma_A^2}{(\sigma_B + \sigma_A)^2} \sigma_B^2 - 2 \frac{\sigma_A^2 \sigma_B^2}{(\sigma_B + \sigma_A)^2} = 0.$$

Bei unkorrelierten Renditen ergibt sich für die Varianz des Minimum-Varianz-Portefeuilles:

$$(\sigma^{\text{MVP}})^2 = \left(\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \right)^2 \sigma_B^2 = \frac{\sigma_A^2 \sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}.$$

In den Fällen vollständiger Korrelation der Wertpapierrenditen entspricht das Minimum-Varianz-Portefeuille also einer risikolosen Position. Jedoch sind bei vollständig positiver Korrelation zum Zusammenstellen des Minimum-Varianz-Portefeuilles gemäß obiger Teilaufgabe Leerverkäufe nötig. Bei unkorrelierten Wertpapierrenditen ist die Varianz des Minimum-Varianz-Portefeuilles positiv, vorausgesetzt, dass weder Wertpapier A noch Wertpapier B eine risikolose Anlage darstellen. Zusammenfassend kann man sagen, dass nur bei perfekter negativer Korrelation der Wertpapierrenditen eine risikolose Position ohne Leerverkäufe erreicht werden kann.

- 5.2. (a) Für den Anteil des Wertpapiers A im Minimum-Varianz-Portefeuille gilt :

$$x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = \frac{4}{5} = 80\%.$$

Für den Anteil des Wertpapiers B folgt: $1 - x_A^{\text{MVP}} = 20\%$.

Ein Investor, der das Portefeuille mit dem minimalen Risiko erwirbt, kauft das Wertpapier A bzw. B in Höhe von 80 % bzw. 20 % seines Investitionsvolumens.

- (b) Mit den berechneten Wertpapieranteilen gilt für die erwartete Rendite und die Standardabweichung des (globalen) Minimum-Varianz-Portefeuilles:

$$\begin{aligned}\mu^{\text{MVP}} &= 0,8 \cdot 10\% + 0,2 \cdot 15\% = 11\% ; \\ \sigma^{\text{MVP}} &= \sqrt{0,8^2 \cdot 0,125^2 + 0,2^2 \cdot 0,25^2 + 0} = 11,18\% .\end{aligned}$$

Bei einem gegenüber der beiden Einzelanlagen gesunkenen Risiko ($\sigma^{\text{MVP}} = 11,18\%$) wird im Minimum-Varianz-Portefeuille eine erwartete Rendite von 11 % erreicht.

- 5.3. (a) Die Anteile der Wertpapiere A und B am (globalen) Minimum-Varianz-Portefeuille errechnen sich folgendermaßen:

$$x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}} = 125\% \quad \text{und} \quad x_B^{\text{MVP}} = -25\% .$$

Das (globale) Minimum-Varianz-Portefeuille wird im vorliegenden Fall nicht erreicht, wenn für beide Wertpapiere nur Käufe zugelassen werden. Vielmehr sind fünf Viertel des Investitionsvolumens für Käufe des Wertpapiers A zu verwenden, während der Ausgleich durch den (Leer-) Verkauf des Wertpapiers B in Höhe eines Viertels erfolgt. Das Verbot von Leerverkäufen bedeutet formal, dass die Anteile x_A und x_B nicht negativ sein dürfen. Das Verbot von Leerverkäufen verhindert, dass das Minimum-Varianz-Portefeuille als globales Minimum erreicht werden kann. Die Beschränkung auf nicht-negative Portefeuilleanteile bewirkt, dass das Minimum-Varianz-Portefeuille „auf dem Rand“ angenommen wird. Das bedeutet: $x_A = 0 \Rightarrow x_B = 1$ oder $x_A = 1 \Rightarrow x_B = 0$. Da die Volatilität von Wertpapier A geringer als die von Wertpapier B ist, wird das geringste Risiko dann erreicht, wenn ausschließlich das Papier A gekauft wird, d. h. $x_A = 100\%$ und $x_B = 0\%$.

- (b) Für die Korrelationskoeffizienten

$$\rho_{A,B} \leq \min\{\sigma_A/\sigma_B, \sigma_B/\sigma_A\} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$$

ist das Minimum-Varianz-Portefeuille bei Leerverkaufsbeschränkung gleichzeitig das globale Minimum-Varianz-Portefeuille.

- (c) Bei unkorrelierten Aktienrenditen ergibt sich im Zwei-Wertpapier-Fall, selbst unter Berücksichtigung von Leerverkaufsbeschränkungen, immer ein Diversifikationseffekt, denn das Minimum-Varianz-Portefeuille wird für positive Quantitäten der Aktien angenommen (vgl. Aufgabe 5.1). Im vorliegenden Fall folgt aus $\rho_{A,B} = 0$:

$$x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = 0,80 \quad \text{und} \quad x_B^{\text{MVP}} = 1 - x_A^{\text{MVP}} = 0,20 .$$

Für die erwartete Rendite und das Risiko des MVPs gilt dann

$$\begin{aligned}\mu_P^{\text{MVP}} &= x_A^{\text{MVP}} \mu_A + x_B^{\text{MVP}} \mu_B = 6\% \quad \text{und} \\ \sigma_P^{\text{MVP}} &= \sqrt{(x_A^{\text{MVP}})^2 \sigma_A^2 + (x_B^{\text{MVP}})^2 \sigma_B^2} = 8,94\% ,\end{aligned}$$

so dass das Minimum-Varianz-Portefeuille ein geringeres Risiko aufweist, als dies bei einer Einzelanlage in das Wertpapiere A oder das Wertpapier B der Fall wäre:

$$\sigma^{\text{MVP}} = 8,94\% < \min\{10\%, 20\%\} = \min\{\sigma_A, \sigma_B\}.$$

Es liegt somit ein *starker* Diversifikationseffekt bei unkorrelierten Wertpapierrenditen vor.

- 5.4. (a) Die wertmäßigen Anteile von Wertpapier A bzw. B am globalen Minimum-Varianz-Portefeuille errechnen sich folgendermaßen:

$$x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}} = 300\% \quad \text{bzw.} \quad x_B^{\text{MVP}} = -200\%.$$

Die erwartete Rendite und das Risiko des Minimum-Varianz-Portefeuilles lauten damit: $\mu^{\text{MVP}} = 17,5\%$ und $\sigma^{\text{MVP}} = 0\%$.

(b)

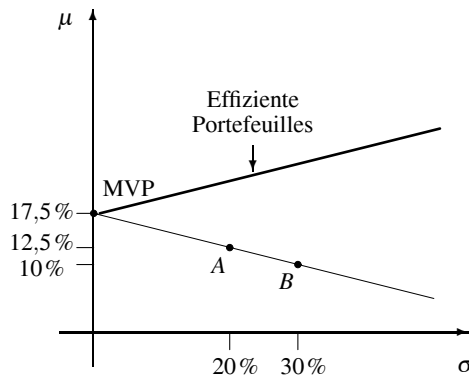


Abb. L.11. Aufgabe 5.4 (b). Ohne Leerverkaufsverbot werden die effizienten Portefeuilles durch die obere (fette) Gerade repräsentiert. Bei Leerverkaufsbeschränkung stellt Wertpapier A das einzige effiziente Portefeuille dar.

- 5.5. (a) Das Minimum-Varianz-Portefeuille hat die folgende Zusammensetzung:

$$x_A^{\text{MVP}} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}} = 5,88\% \quad \text{und} \quad x_B^{\text{MVP}} = 94,12\%.$$

Somit erhält man für den Erwartungswert und die Varianz des Minimum-Varianz-Portefeuilles:

$$\begin{aligned} \mu^{\text{MVP}} &= x_A^{\text{MVP}} \mu_A + x_B^{\text{MVP}} \mu_B = 15,29\%; \\ \sigma^{\text{MVP}} &= \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}} = 9,94\%. \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse ändern sich nicht, wenn Leerverkäufe zugelassen werden, da die Anteile des Minimum-Varianz-Portefeuilles an den jeweiligen Wertpapieren zwischen 0 und 100% liegen.

- (b) Das Minimum-Varianz-Portefeuille bei Leerverkaufsbeschränkung stellt gemäß Aufgabenteil (a) auch das *globale* Minimum-Varianz-Portefeuille dar.

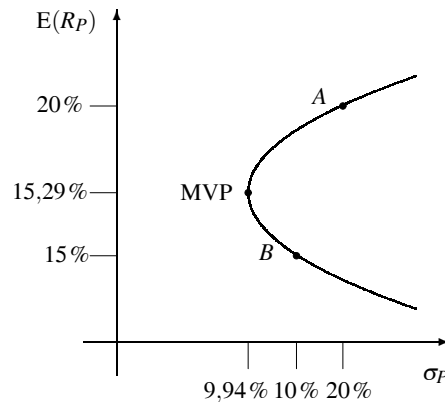


Abb. L.12. Aufgabe 5.5(b).

Ohne Leerverkäufe können nur die Portefeuilles zusammengestellt werden, die auf der Hyperbel zwischen den Wertpapieren A und B liegen.

- (c) Ein Investor, der die größtmögliche Rendite erzielen möchte und bei seiner Wahl das Risiko unberücksichtigt lässt, investiert nur in Wertpapier A – das Wertpapier mit der höchsten erwarteten Rendite.
- (d) Es gilt für die Rendite bzw. die Volatilität eines Portefeuille P bestehend aus x Anteilen an Wertpapier A und $1 - x$ Anteilen an der risikolosen Geldanlage ($x \geq 0$): $\mu_P = x \cdot \mu_A + (1 - x)r_f$ bzw. $\sigma_P^2 = x^2 \sigma_A^2$. Wegen $0 \leq x \leq 1$ folgt: $x = \sigma_P / \sigma_A$, woraus man für die Rendite-Risiko-Beziehung aller Portefeuilles folgende Gleichung erhält:

$$\begin{aligned} \mu_P &= \frac{\sigma_P}{\sigma_A} \mu_A + \left(1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_A}\right) r_f = \left(\frac{\mu_A}{\sigma_A} - \frac{r_f}{\sigma_A}\right) \sigma_P + r_f \\ &= 0,75 \cdot \sigma_P + 0,05 \quad \text{für } 0 \leq \sigma_P \leq \sigma_A = 0,20. \end{aligned}$$

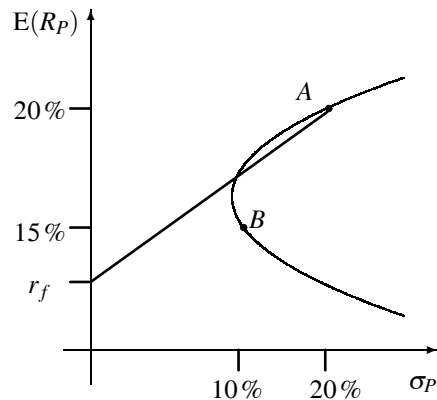


Abb. L.13. Aufgabe 5.5(d).

Die fett gedruckte Gerade stellt die Portefeuilles dar, die sich durch Mischung des Wertpapiers A mit der risikolosen Geldanlage ergeben.

- (e) Die effizienten Portefeuilles liegen auf der Gerade zwischen der risikolosen Anlage und dem Tangentialportefeuille P^* und auf dem Hyperbelstück zwischen P^* und Wertpapier A. Sind Leerverkäufe zugelassen, insbesondere auch Kreditaufnahmen zu 5 % in unbeschränktem Umfang, so liegen alle (global) effizienten Portefeuilles auf der Halbgeraden durch die risikolose Anlage und das Tangentialportefeuille P^* . Somit stellen die effizienten Portefeuilles zwischen der risikolosen Anlage und P^* global effiziente Portefeuilles dar. Die Portefeuilles auf dem Hyperbelaststück zwischen P^* und A jedoch nicht.

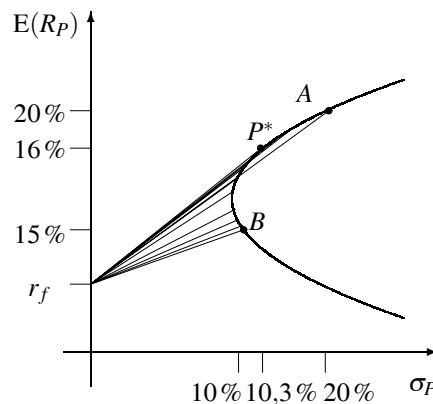


Abb. L.14. Aufgabe 5.5 (e). Die Portefeuilles, die sich durch Kombination der beiden Wertpapiere und der risikolosen Anlage ergeben, sind durch die schraffierte Fläche gekennzeichnet.

- 5.6. (a) Zur Bestimmung der effizienten Portefeuilles muss gemäß der Tobin-Separation zunächst das Tangentialportefeuille P^* berechnet werden. Dazu ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} y_1 \sigma_1^2 + y_2 \sigma_{1,2} &= \mu_1 - r_f \\ y_2 \sigma_2^2 + y_1 \sigma_{1,2} &= \mu_2 - r_f \end{aligned}$$

$$0,15 \cdot y_1 + \sqrt{0,15 \cdot 0,5 \cdot 0,9} \cdot y_2 = 0,12 - 0,05 \quad \dots \implies y_1 = 0,2547$$

$$0,25 \cdot y_2 + \sqrt{0,15 \cdot 0,5 \cdot 0,9} \cdot y_1 = 0,14 - 0,05 \quad \dots \implies y_2 = 0,1825$$

Für die Anteile am Tangentialportefeuille P^* erhält man somit:

$$x_1^* = \frac{y_1}{y_1 + y_2} = 0,5826 \quad \text{und} \quad x_2^* = \frac{y_2}{y_1 + y_2} = 0,4174.$$

Der Erwartungswert und die Standardabweichung des Tangentialportefeuilles berechnen sich zu: $\mu_{P^*} = 12,83\%$ und $\sigma_{P^*} = 42,34\%$. Die effizienten Portefeuilles ergeben sich durch Mischung des Tangentialportefeuilles mit der risikolosen Anlage und beschreiben deshalb im (μ, σ) -Diagramm die folgende Gerade:

$$\mu_P = \sigma_P \left(\frac{\mu_{P^*}}{\sigma_{P^*}} - \frac{r_f}{\sigma_{P^*}} \right) + r_f = 18,51\% \cdot \sigma_P + 5\% \quad \text{für} \quad \sigma_P \geq 0.$$

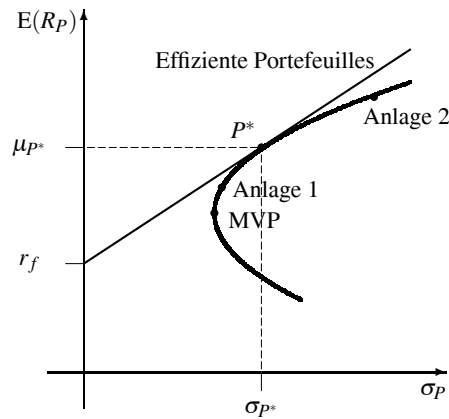


Abb. L.15. Aufgabe 5.6 (a). Die effizienten Portfeuilleen werden durch die Halbgerade, die durch die risikolose Anlage und das Tangentialportfeuille P^* geht, beschrieben.

- (b) Wenn zum risikolosen Zinssatz nur Geld angelegt werden kann, dann setzt sich die Menge der effizienten Portfeuilleen aus der Strecke zwischen der risikolosen Anlage und dem Tangentialportfeuille und dem Teil des oberen Astes der Hyperbel rechts von dem Tangentialportfeuille zusammen.

Wenn zum risikolosen Zinssatz nur Geld aufgenommen werden kann, dann setzt sich die Menge der effizienten Portfeuilleen aus der Gerade rechts von dem Tangentialportfeuille und dem Hyperbelstück zwischen dem Minimum-Varianz-Portfeuille und dem Tangentialportfeuille zusammen.

- 5.7. (a) Die Gleichung für die Rendite eines Wertpapiers P im Marktmodell lautet:

$$R_P = E(R_P) + \beta_P(R_M - E(R_M)) + \varepsilon_P.$$

Für die beiden Wertpapiere ergeben sich somit die folgenden Gleichungen:

$$R_A = 8\% + 0,9(R_M - 12\%) + \varepsilon_A,$$

$$R_B = 15\% + 1,2(R_M - 12\%) + \varepsilon_B.$$

Für die Rendite des Portfeuillees P ergibt sich:

$$\begin{aligned} R_P &= x_A R_A + x_B R_B \\ &= 0,4(8\% + 0,9(R_M - 12\%) + \varepsilon_A) + 0,6(15\% + 1,2(R_M - 12\%) + \varepsilon_B) \\ &= 3,2\% + 0,36(R_M - 12\%) + 0,4\varepsilon_A + 9\% + 0,72(R_M - 12\%) + 0,6\varepsilon_B \\ &= 12,2\% + 1,08(R_M - 12\%) + 0,4\varepsilon_A + 0,6\varepsilon_B. \end{aligned}$$

- (b) Da keine unternehmensinternen Überraschungen auftauchen, gilt $\varepsilon_A = \varepsilon_B = 0$. Man erhält für die Renditen der beiden Wertpapiere und des Portfeuillees die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} R_A &= 8\% + 0,9(R_M - 12\%) + \varepsilon_A \\ &= 8\% + 0,9(10,5\% - 12\%) + 0 = 6,65\%; \end{aligned}$$

$$R_B = 15\% + 1,2(R_M - 12\%) + \varepsilon_B = 13,2\%;$$

$$R_P = 12,2\% + 1,08(R_M - 12\%) + 0,4\varepsilon_A + 0,6\varepsilon_B = 10,58\%.$$

Lösungen zu Kapitel 6

- 6.1. (a) Die Wertpapierkenngerade lautet $\mu_i = r_f + (\mu_m - r_f)\beta_i$. Sie beschreibt den linearen Zusammenhang zwischen der erwarteten Rendite und dem systematischen Risiko einzelner Wertpapiere im Marktgleichgewicht. Dieser Zusammenhang besagt, dass die erwartete Rendite den Zinssatz für risikolose Anlagen um eine Risikoprämie übersteigen muss. Die Risikoprämie ist dabei proportional zum mit dem Beta gemessenen systematischen Risiko des betreffenden Titels.

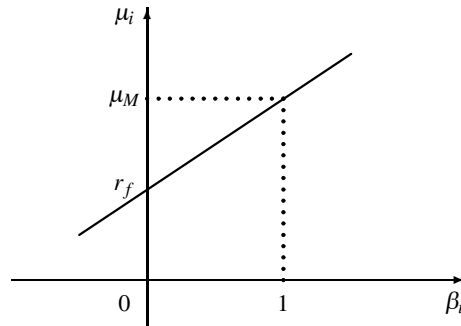


Abb. L.16. Aufgabe 6.1.a: Wertpapierkenngerade. Gemäß Wertpapierkenngerade ist die Überrendite proportional zum systematischen Risiko der Wertpapiere.

- (b) Wertpapiere mit $\beta < 0$ existieren, obwohl im Marktgleichgewicht ihre Rendite kleiner als der risikolose Zinssatz ist. Sie dienen der Diversifikation.
 (c) Ein Wertpapier mit Beta $\beta_i = 1,5$ hat gemäß Wertpapierkenngerade eine erwartete Rendite von

$$\mu_i = r_f + (\mu_m - r_f)\beta_i = 0,05 + (0,1 - 0,05)1,5 = 0,125.$$

Für $\beta_i = 0,8$ gilt:

$$\mu_i = 0,05 + 0,8 \cdot (0,1 - 0,05) = 0,09.$$

- 6.2. (a) Gemäß Wertpapierkenngerade des CAPM ergibt sich eine erwartete Rendite des Wertpapiers von $\mu_i = r_f + (\mu_m - r_f)\beta = 0,23 = 23\%$. Eine erwartete Rendite von 28% ist unter den Modellvoraussetzungen nicht denkbar, da der Markt sich nicht im Gleichgewicht befinden würde.
 (b) Das vorliegende Wertpapier wäre nicht auf der Wertpapierkenngerade, sondern darüber positioniert. Anders ausgedrückt: Die erwartete Rendite wäre zu hoch bzw. der Kurs zu niedrig, das Papier also unterbewertet. Die Marktteilnehmer würden das Wertpapier aufgrund seiner hohen erwarteten Rendite verstärkt kaufen. Daher würde der Kurs steigen bzw. die Rendite fallen, bis die Position des Wertpapiers im Gleichgewicht die Wertpapierkenngerade erreicht hätte.
 (c) Wertpapiere, die oberhalb (unterhalb) der Wertpapierkenngerade positioniert sind, weisen eine im Verhältnis zum systematischen Risiko zu hohe (niedrige) erwartete Rendite auf. Deshalb sind die Marktteilnehmer

geneigt, diese Titel zu kaufen (verkaufen). Transaktionskosten, die beim Handel anfallen, können aber diesen Vorteil (Nachteil) überkompensieren. Wertpapiere, die eine zu geringe erwartete Rendite aufweisen, werden von den Marktteilnehmern verkauft; dies ist aber bei Leerverkaufsverbot nur aus vorhandenen Beständen möglich.

- 6.3. Das Beta eines Portefeuilles kann aus der Wertpapierkenngerade abgeleitet werden:

$$\beta_P = \frac{\mu_P - r_f}{\mu_M - r_f} = 1,5 .$$

Das Risiko eines effizienten Portefeuilles besteht nur aus systematischem Risiko: $\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2$. Für die Standardabweichung der Rendite ergibt sich somit:

$$\sigma_P = \beta_P \sigma_M = 0,30 = 30\% .$$

Die Kovarianz kann über die Definition des Beta berechnet werden:

$$\beta_P = \frac{\text{Cov}(R_P, R_M)}{\sigma_M^2} \Rightarrow \text{Cov}(R_P, R_M) = 0,06 .$$

Somit ergibt sich ein Korrelationskoeffizient von

$$\rho_{M,P} = \frac{\text{Cov}(R_P, R_M)}{\sigma_P \sigma_M} = 1 .$$

Effiziente Wertpapiere sind also mit dem Markt perfekt korreliert. Dies kann man auch folgendermaßen erklären: Effiziente Portefeuilles sind vollständig diversifiziert und bestehen ausschließlich aus Marktportefeuille und risikoloser Anlage. Die Rendite eines solchen Portefeuilles ist daher mit der Marktrendite perfekt korreliert.

- 6.4. Zunächst müssen aus den gegebenen Daten die erwartete Marktrendite μ_M sowie der risikolose Zinssatz r_f errechnet werden. Da im Gleichgewicht jedes Wertpapier auf der Wertpapierkenngerade $\mu_i = r_f + (\mu_M - r_f) \beta_i$ liegen muss, gilt:

$$1. \text{ Wertpapier: } 0,076 = r_f + (\mu_M - r_f) \cdot 0,2 \quad (1)$$

$$2. \text{ Wertpapier: } 0,124 = r_f + (\mu_M - r_f) \cdot 0,8 \quad (2)$$

Dieses ist ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten. Aus (1) folgt

$$r_f = (0,076 - 0,2 \cdot \mu_M) / 0,8 .$$

In (2) eingesetzt

$$0,124 = 0,095 - 0,25\mu_M + 0,8\mu_M - 0,8(0,095 - 0,25\mu_M) ,$$

ergeben sich die Werte

$$\mu_M = 14\% \quad \text{und} \quad r_f = 6\% .$$

Überprüfung der Ergebnisse durch Einsetzen in die Gleichung der Wertpapierkenngeraden der anderen Wertpapiere:

$$\mu_3 = 0,06 + [0,14 - 0,06] \cdot 1,2 = 0,156 ,$$

$$\mu_4 = 0,06 + [0,14 - 0,06] \cdot 1,6 = 0,188 .$$

Somit ergeben sich folgende Werte für den Erwartungswert und das Beta des aktuellen Portefeuilles:

$$\begin{aligned} \mu_P &= \sum_{i=1}^5 p_i \cdot \mu_i \\ &= 0,1 \cdot 0,076 + 0,1 \cdot 0,124 + 0,1 \cdot 0,156 + 0,2 \cdot 0,188 + 0,5 \cdot 0,06 \\ &= 0,1032 , \\ \beta_P &= \sum_{i=1}^5 p_i \cdot \beta_i \\ &= 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 1,2 + 0,2 \cdot 1,6 + 0,5 \cdot 0 = 0,54 . \end{aligned}$$

Die erwartete Rendite ist also geringer als 12 %. Um die geforderte Rendite von 12 % zu erzielen, wird nun ein Anteil x von der risikolosen Anlage verkauft und in das Marktportefeuille investiert. Für das Portefeuille P' gilt somit:

$$\begin{aligned} 0,12 &= \mu_{P'} = 0,1 \cdot 0,076 + 0,1 \cdot 0,124 + 0,1 \cdot 0,156 \\ &\quad + 0,2 \cdot 0,188 + (0,5 - x) \cdot 0,06 + x \cdot 0,14 , \\ \Rightarrow \quad 0,12 - 0,1032 &= 0,08x \\ x &= 0,21 . \end{aligned}$$

Im neuen Portefeuille werden also nur noch 29 % des Gesamtvermögens in ein risikoloses Wertpapier und 21 % in das Marktportefeuille angelegt. Die Aufteilung der restlichen 50 % des Gesamtvermögens erfolgt wie bisher in die im Portefeuille enthaltenen riskanten Wertpapieren. Das Beta dieses Portefeuilles beträgt $0,54 + 0,21 \cdot 1 = 0,75$.

Im Folgenden wird die Zusammensetzung eines Portefeuilles P'' ermittelt, das eine erwartete Rendite von 12 % erbringt und lediglich aus dem risikolosen Wertpapier und dem Marktportefeuille besteht.

$$\begin{aligned} \mu_{P''} &= 0,06 \cdot x + 0,14 \cdot (1 - x) = 0,12 , \\ \Rightarrow x &= 0,25 . \end{aligned}$$

Es werden also 25 % des Gesamtvermögens in das risikolose Wertpapier und 75 % in das Marktportefeuille investiert.

- 6.5. Aufgrund ihrer Hebelwirkung haben Optionen ein betragsmäßig höheres Beta als ihre zugrundeliegende Aktie. Optionen liegen daher auf der Wertpapierkenngerade weiter außen als die Aktie. Je mehr eine Optionen im Geld notiert, desto näher ist sie dabei an der Aktie positioniert. Intuitiv kann man das damit begründen, dass weit im Geld notierende Optionen fast dem Basiswert selbst entsprechen - Calls der Long-Position, Puts der Shortposition.
- 6.6. (a) Den ersten Abschnitt der Effizienzlinie erhält man, indem man risikolose Anlage und Tangentialportefeuille kombiniert oder (evtl. bis zum Kreditlimit) kreditfinanziert in das Tangentialportefeuille investiert. Haben-

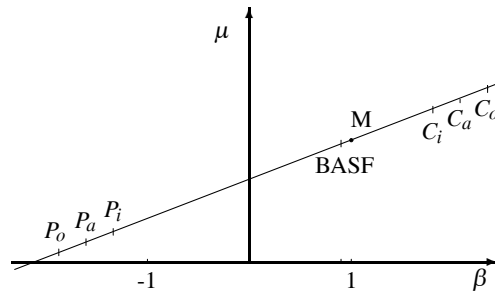


Abb. L.17. Aufgabe 6.5: Optionen auf der Wertpapierkenngerade.

Die Subskripte i , a und o bezeichnen Optionen, die im Geld, am Geld bzw. aus dem Geld notieren.

und Sollzinssatz werden dabei als identisch angenommen. Dasjenige Portefeuille, das bei maximaler Kreditaufnahme in T investiert, wird mit $\hat{T}$ bezeichnet. Um Portefeuilles mit erwarteten Renditen größer als $\mu_{\hat{T}}$ zu bestimmen, beleiht man Randportefeuilles oberhalb des Tangentialportefeuilles (z. B. Portefeuille A) bis zur Beleihungsgrenze. Wird das Portefeuille maximal bis Hälfte des Vermögens beleihen, so besteht es aus einem Anteil Eigenkapital und einem Anteil Fremdkapital. Die Portefeuillerendite beträgt in diesem Fall $R_{\hat{A}} = 2R_A - r_f$, falls in das Randportefeuille A investiert wird. Das Beta des Portefeuilles beträgt dabei $\beta_{\hat{A}} = 2\beta_A$.

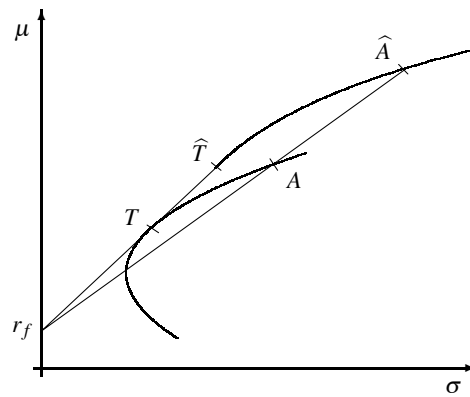


Abb. L.18. Aufgabe 6.6.(a): Effizienzzlinie bei eingeschränkter Kreditaufnahme.

- (b) Portefeuilles mit $\beta_P > 2\beta_T$ liegen auf dem oberen, gekrümmten Teil der Effizienzzlinie.
- (c) Anleger, die effiziente Portefeuilles mit einer erwarteten Rendite kleiner gleich $\mu_{\hat{T}}$ zusammenstellen wollen, investieren in das Tangentialportefeuille. Um effiziente Portefeuilles mit erwarteter Rendite größer gleich $\mu_{\hat{T}}$ zusammenzustellen, investieren sie am Kreditlimit in Randportefeuilles oberhalb des Tangentialportefeuilles. Der ausschließlich riskante Anteil der Portefeuilles, die die Anleger zusammenstellen, sind also das Randportefeuille T und Randportefeuilles oberhalb von T . Das Marktportefeuille ist eine Mischung dieser Randportefeuilles und somit wiederum ein Randportefeuille, allerdings eines oberhalb des Tangentialportefeuilles. Es entspricht in diesem Fall also nicht dem Tangentialportefeuille.

- 6.7. (a) Die erwartete Rendite des Portefeuilles ergibt sich aus dem CAPM mit $\beta_i = 1,0$ zu:

$$\mu_i = r_f + (\mu_M - r_f)\beta_i = 0,08 + 0,062 \cdot 1,0 = 0,142.$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Gleichung der APT ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0,142 &= \mu_i = r_f + \lambda_1\beta_{i1} + \lambda_2\beta_{i2} \\ &= 0,08 + 0,05\beta_{i1} + 0,11\beta_{i2} \\ &= 0,08 + 0,05 \cdot (-0,5) + 0,11\beta_{i2} \\ \Rightarrow \quad \beta_{i2} &= \frac{0,142 - 0,08 - 0,05 \cdot (-0,5)}{0,11} = 0,7909. \end{aligned}$$

Die Sensitivität der Portefeullerrenditen auf den Faktor Inflation beträgt somit 0,791, d. h. die Portefeullerrenditen reagieren defensiv auf Änderungen der Inflationsrate.

- (b) Die APT-Gleichung lautet nun:

$$\mu_i = 0,142 = 0,08 + 0,05\beta_{i1} + 0,11\beta_{i2}.$$

Mit dem vorgegebenen Beta-Koeffizienten $\beta_{i2} = 0$ ergibt sich aus $0,142 = 0,08 + 0,05\beta_{i1}$ die Sensitivität

$$\beta_{i1} = \frac{0,142 - 0,08}{0,05} = 1,24.$$

In diesem Fall beträgt die Sensitivität der Portefeullerrenditen auf den ersten Faktor 1,24, d. h. die Portefeullerrendite reagiert aggressiv auf Änderungen des Indexes der industriellen Produktion.

- 6.8. Die erwartete Rendite des Portefeuilles ergibt sich gemäß CAPM zu:

$$\mu_i = r_f + (\mu_M - r_f)\beta_i = 9\%.$$

Die Gleichung der APT lautet:

$$\mu_i = r_f + \lambda_1 \cdot \beta_{i1} + \lambda_2 \cdot \beta_{i2} = 5\% + 5\% \cdot \beta_{i1} + 7,5\% \cdot \beta_{i2}.$$

- (a) Damit die Portefeullerrendite gemäß CAPM und APT gleich ist, muss gelten:

$$\begin{aligned} 9\% &= 5\% + 5\% \cdot \beta_{i1} + 7,5\% \cdot \beta_{i2} \\ &= 5\% + 5\% \cdot 0,3 + 7,5\% \cdot \beta_{i2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\beta_{i2} = \frac{9\% - 5\% - 1,5\%}{7,5\%} = \frac{1}{3}.$$

Die Sensitivität der Portefeullerrendite bezüglich des Faktors Preisniveau beträgt also etwa 0,33, d. h. die Portefeullerrendite reagiert defensiv auf Änderungen der Inflationsrate.

(b) Die Gleichung der APT lautet nun:

$$\begin{aligned}\mu_i &= 5\% + 5\% \cdot \beta_{i1} + 7,5\% \cdot \beta_{i2} \\ &= 5\% + 5\% \cdot 0,2 + 7,5\% \cdot \frac{1}{3} = 8,5\% .\end{aligned}$$

Für die Wertpapierkenngerade gilt:

$$\begin{aligned}\mu_i &= r_f + \beta_i (\mu_M - r_f) \\ &= 5\% + \beta_i (10\% - 5\%) .\end{aligned}$$

Gleichsetzen der Wertpapierkenngeraden und der APT-Gleichung liefert für den gesuchten Beta-Faktor:

$$\beta_i = \frac{8,5\% - 5\%}{5\%} = 0,7 .$$

Die Sensitivität der Portefeullerendite bezüglich des Marktportefeulles beträgt nun 0,7, d. h. die Portefeullerendite reagiert wieder defensiv auf unerwartete Änderungen der Marktrendite.

Lösungen zu Kapitel 7

- 7.1. (a) Unter den von Modigliani und Miller getroffenen Annahmen ist die Kapitalstruktur bei Vernachlässigung von Steuern irrelevant (siehe MM-These I).
 (b) Die Zunahme des Verschuldungsgrades hat eine Hebelwirkung auf die Eigenkapitalrendite:

$$R_E = R_V + (R_V - r_D) \frac{D}{E}.$$

Dabei bezeichnet R_E die Eigenkapitalrendite, R_V die Gesamtkapitalrendite, D das Fremdkapital und E das Eigenkapital. Für die entsprechenden erwarteten Renditen gilt dann:

$$k_E = \text{WACC} + (\text{WACC} - k_D) \frac{D}{E}.$$

Maximal wird die gesamte Neuinvestition fremd finanziert, d. h. der maximale Verschuldungsgrad beträgt $D/E = 2/10 = 0,2$. Da die Risikostruktur sich nicht verändert, gilt auch weiterhin $\text{WACC} = 0,1$. Somit erhält man als erwartete Eigenkapitalrendite, die maximal erwartet werden kann:

$$k_E = 0,1 + (0,1 - 0,05) \cdot 0,2 = 0,11.$$

- (c) Bei Steuern ist ein hoher Verschuldungsgrad aufgrund des Steuervorteils der Fremdfinanzierung vorteilhaft, d. h. die Expansion sollte fremdfinanziert werden. Durch die Expansion des Unternehmens von 10 Mio€ auf 12 Mio€ erhöht sich der Gewinn bei unveränderter Risikostruktur von $10 \cdot 0,1 = 1$ Mio € auf $12 \cdot 0,1 = 1,2$ Mio€. Während bei vollständiger Eigenfinanzierung der Expansion Steuern in Höhe von $0,5 \cdot 1,2 = 0,6$ Mio€ zu zahlen sind, fallen bei Fremdfinanzierung der Expansion Steuern in Höhe von $50\% (1,2 - 0,05 \cdot 2) = 0,55$ Mio€ an, da die Zinszahlung den zu versteuernden Gewinn mindern. Entsprechend erhalten die Eigenkapitalgeber $1,2 - 0,6 = 0,6$ Mio€ bzw. $1,2 - 0,55 = 0,65$ Mio€ bei Eigen- bzw. Fremdfinanzierung der Expansion und die Eigenkapitalrendite beträgt dabei $0,6/12 = 0,05$ bzw. $0,65/10 = 0,065$. Der Marktwert der Unternehmung beträgt bei Eigenfinanzierung 12 Mio€ und bei Fremdfinanzierung der Expansion $V^U + sk_D D / (1 + k_D) = 12 + 0,5 \cdot 0,05 \cdot 2 / 1,05 = 12,048$ Mio€.
- 7.2. Damit das Risiko der Portefeuilles der drei Aktionäre unverändert bleibt, werden alle ihre individuelle „Kapitalstruktur“ anpassen. Es werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

- Z : Gewinn vor Steuern und Zinsen des Unternehmens;
- E_i : Reinvermögen des i -ten Aktionärs;
- D_i^U : Kreditaufnahme des i -ten Aktionärs, wenn das Unternehmen unverschuldet ist (negativer Wert bedeutet Geldanlage);
- D_i : Kreditaufnahme des i -ten Aktionärs, wenn das Unternehmen verschuldet ist.

Der i -te Aktionär besitzt eine (evtl. teilweise kreditfinanzierte) Investition in Aktien des unverschuldeten Unternehmens in Höhe von $E_i + D_i^U$. Sein Einkommen resultiert aus einem Anteil $(E_i + D_i^U)/E^U$ am Gewinn Z des unverschuldeten Unternehmens abzüglich der Zinstilgung:

$$\frac{E_i + D_i^U}{E^U} \cdot Z - r_D \cdot D_i^U.$$

Verschuldet sich das Unternehmen, so beträgt der Gewinn nach Zinsen $Z - r_D D$. Das Einkommen des i -ten Aktionärs bei verschuldetem Unternehmen beträgt dann:

$$\frac{E_i + D_i}{E} \cdot (Z - r_D D) - r_D \cdot D_i = \frac{E_i + D_i}{E} \cdot Z - r_D \left(E_i \frac{D}{E} + D_i \left(1 + \frac{D}{E} \right) \right).$$

Das Risiko des Portefeuilles ändert sich nicht, wenn die Auszahlungen für alle Z identisch sind. Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$\frac{E_i + D_i^U}{E^U} = \frac{E_i + D_i}{E}$$

und

$$D_i^U = E_i \frac{D}{E} + D_i \left(1 + \frac{D}{E} \right).$$

Aus letzter Gleichung ergibt sich mit $D/E = 0,25$ durch Umstellen eine notwendige Kreditaufnahme des i -ten Aktionärs in Höhe von

$$D_i = \frac{4}{5} D_i^U - \frac{1}{5} E_i,$$

wobei ein negativer Wert eine Geldanlage darstellt. Der i -te Aktionär investiert demnach in Aktien:

$$E_i + D_i = \frac{4}{5} (E_i + D_i^U).$$

Um das Risiko ihrer Portefeuilles unverändert zu lassen, müssen die Aktionäre gemäß der letzten beiden Gleichungen folgende Portefeuilles aus Aktien und Kreditaufnahme bzw. Geldanlage zusammenstellen:

	E_i	D_i^U	Bestandswerte		
			(a) Aktien	(b) Kredite	(c) Geldanlage
A	8 000	2 000	8 000	0	0
B	56 000	-6 000	40 000	0	16 000
C	20 000	0	16 000	0	4 000

- 7.3. (a) Für den Wert des Eigenkapitals, des Fremdkapitals und des Unternehmens gilt $E = 100\text{€} \cdot 1 \text{ Mio} = 100 \text{ Mio€}$, $D = 25 \text{ Mio€}$ bzw. $V = E + D = 125 \text{ Mio€}$.

	Aktiensplitting	Dividende	Verschuldung
(i) Marktwert der Schulden	unverändert	unverändert	+ 5 Mio
(ii) Anzahl der Aktien	2 Mio	unverändert	unverändert
(iii) Preis pro Aktie	50€	– 1€	unverändert
(iv) Marktwert des Eigenkapitals	unverändert	– 1 Mio	unverändert
(v) Marktwert des Unternehmens	unverändert	– 1 Mio	+ 5 Mio

- (b)
- Die Altaktionäre sind indifferent zu einem Aktiensplitting. Vor der Kapitalerhöhung hat eine Aktie einen Wert von € 100. Nach der Kapitalerhöhung besitzt der Aktionär doppelt so viele Aktien, die jedoch nur noch die Hälfte wert sind.
 - Die Altaktionäre sind auch bzgl. einer Dividendenausschüttung indifferent, da der Kursverlust von 1 € durch die Dividendenzahlung von 1 € kompensiert wird.
 - Die Altaktionäre sind indifferent bezüglich einer Neuverschuldung, da Steuern und Kosten aufgrund finanzieller Schwierigkeiten unberücksichtigt bleiben.
- 7.4. (a) Bei einem erwarteten Rückfluss in Höhe von

$$E(Z) = 100 \text{ Mio €} \cdot (1 + \mu_A) = 130 \text{ Mio €}$$

beträgt der erwartete Gewinn der Go East AG $100 \text{ Mio €} \cdot \mu_A = 30 \text{ Mio €}$. Die Eigenkapitalkosten ergeben sich gemäß Wertpapierkenngerade zu

$$\begin{aligned} k_E^U &= r_f + (\mu_M - r_f) \cdot \beta_A = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M^2} \cdot \text{Cov}(R_A, R_M) \\ &= 0,08 + \frac{0,12 - 0,08}{0,5^2} \cdot 0,9 \cdot 0,5 \cdot 0,75 = 0,134. \end{aligned}$$

Der Wert des Eigenkapitals ergibt sich somit zu:

$$E = V^U = V = \frac{E(Z)}{1 + k_E^U} = 114,638 \text{ Mio€}.$$

- (b) Die durchschnittlichen Kapitalkosten entsprechen den Kapitalkosten der unverschuldeten Unternehmung:

$$\text{WACC} = k_E^U = 13,40 \%.$$

Daraus ergeben sich folgende Eigenkapitalkosten der verschuldeten Unternehmung:

$$k_E = \text{WACC} + (\text{WACC} - k_D) \frac{D}{E} = 0,134 + (0,134 - 0,08) \cdot 0,4 = 15,56 \%.$$

Der Wert des Fremdkapitals ergibt sich mit Hilfe von $E = V/(1 + D/E)$ zu

$$D = V - E = V - \frac{V}{1 + D/E} = 26,455 \text{ Mio€} \left(1 - \frac{1}{1,4} \right) = 32,754 \text{ Mio€} .$$

- (c) Gemäß Wertpapierkenngerade betragen die Fremdkapitalkosten:

$$k_D = r_f + (\mu_M - r_f)\beta_D = 0,08 + (\mu_M - 0,08) \cdot \beta_D = 9,2 \% .$$

Bei einem erwarteten Zinsertrag von $k_D D = 10 \text{ Mio€}$ müsste der heutige Marktwert des Fremdkapitals $D = 10 \text{ Mio€} / 0,092 = 108,696 \text{ Mio€}$ betragen.

- 7.5. (a) Der Beta-Koeffizient des neuen Geschäftsbereichs von BASS stimmt mit dem Beta-Koeffizienten des Unternehmens MACK überein:

$$\begin{aligned} \beta_V &= \frac{E}{D+E} \beta_E + \frac{D}{D+E} \beta_D \\ &= \frac{1}{D/E+1} \beta_E + \frac{D/E}{D/E+1} \beta_D \\ &= \frac{1}{1,3} \cdot 1,4 + \frac{0,3}{1,3} \cdot 0,2 = 1,123 . \end{aligned}$$

Entsprechend sind die Investitionsrechnungen für den neuen Pharma-Bereich mit dem Kapitalkostensatz von MACK

$$k_{MACK} = 0,08 + 1,123 \cdot (0,19 - 0,08) = 0,2035$$

durchzuführen.

- (b) Der Beta-Koeffizient der Gesamtkapitalrendite β_V^{alt} vor Entstehung des neuen Geschäftsbereichs beträgt:

$$\beta_V^{alt} = \frac{E}{D+E} \beta_E = \frac{1}{D/E+1} \beta_E = \frac{1}{1,5} 0,8 = 0,5\bar{3} .$$

Der Beta-Koeffizient der Gesamtkapitalrendite β_V^{neu} nach Entstehung des neuen Geschäftsbereichs berechnet sich aus den Beta-Koeffizienten der Geschäftsbereiche gewichtet mit dem wertmäßigen Anteil am Gesamtunternehmen:

$$\beta_V^{neu} = 0,1 \cdot 1,123 + 0,9 \cdot 0,5\bar{3} = 0,592 .$$

Hiermit ergibt sich der Beta-Koeffizient der Eigenkapitalrendite nach Entstehung des neuen Geschäftsbereichs zu:

$$\beta_E^{neu} = \left(1 + \frac{D}{E} \right) \cdot \beta_V^{neu} = 1,5 \cdot 0,592 = 0,888 .$$

Lösungen zu Kapitel 8

- 8.1. (a) Das Anfangsvermögen beträgt $w = 10\,000$. Dieses ändert sich um den Gewinn bzw. Verlust in Höhe von

$$z^- \equiv -1\,000,$$

$$z^+ \equiv +1\,000,$$

je nach dem, ob man gewinnt oder verliert. Der erwartete Gewinn nach dem Spiel beträgt:

$$\begin{aligned} E(Z) &= z^- \cdot 0,5 + z^+ \cdot 0,5 \\ &= -1\,000 \cdot 0,5 + 1\,000 \cdot 0,5 = 0 \\ \Rightarrow E(w + Z) &= w + E(Z) = 10\,000 \end{aligned}$$

Das Sicherheitsäquivalent hängt vom Anfangsvermögen w ab. Die Berechnung des Sicherheitsäquivalents $S(w)$ erfolgt aus:

$$S(w) = E(Z) - \pi(w),$$

wobei π dem Betrag entspricht, den man erhalten möchte, um bereit zu sein, am Spiel teilzunehmen. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} u(S + w) &= E(u(w + Z)) \\ \Rightarrow S + w &= u^{-1}(0,5 \cdot u(w + z^-) + 0,5 \cdot u(w + z^+)) \\ \Rightarrow S + w &= e^{0,5 \cdot \ln(w + z^-) + 0,5 \cdot \ln(w + z^+)} \\ &= \sqrt{(w + z^-) \cdot (w + z^+)} \\ \Rightarrow S + 10\,000 &= \sqrt{9\,000} \cdot \sqrt{11\,000}, \\ S &= -50,13. \end{aligned}$$

Mit $\pi = E(Z) - S = 0 - S = -S$ ergibt sich nun die Risikoprämie zu

$$\pi(w = 10\,000) = 50,13.$$

- (b) Das Vermögen beträgt nun € 1 000 000,-. In diesem Fall ergibt sich ein Sicherheitsäquivalent in Höhe von

$$S = \sqrt{999\,000} \cdot \sqrt{1\,001\,000} - w = 999\,999,5 - 1\,000\,000 = -0,5$$

und die Risikoprämie beträgt

$$\pi(w = 1\,000\,000) = E(Z) - S = 0 - (-0,5) = 0,5.$$

- (c) Die Risikoprämie betrage $\pi = €\,25,-$; gesucht ist das entsprechende Vermögen w . Es gilt:

$$\begin{aligned}\pi &= -S = 25, \\ -25 + w &= \sqrt{w - 1\,000} \cdot \sqrt{w + 1\,000}, \\ w - 25 &= \sqrt{w^2 - 1\,000\,000}, \\ w^2 - 50 \cdot w + 625 &= w^2 - 1\,000\,000, \\ w &= 20\,012,5.\end{aligned}$$

Das Vermögen muss mindestens € 20 012,50 betragen, damit eine Beteiligung am Spiel erfolgt.

- 8.2. (a) Zunächst bestimmen wir den Erwartungsnutzen ohne Abschluss einer Versicherung. Das Endvermögen beträgt im Fall, dass kein Schaden eintritt:

Haus:	50 000
Anlage und Zinsen:	21 400
	71 400

Als Erwartungsnutzen ergibt sich im Schadensfall ohne Versicherung:

$$\begin{aligned}E(u(w)) &= 0,98 \cdot \ln(71\,400) \\ &\quad + 0,01 \cdot \ln(71\,400 - 5\,000) \\ &\quad + 0,005 \cdot \ln(71\,400 - 10\,000) \\ &\quad + 0,005 \cdot \ln(71\,400 - 50\,000) \\ &= 11,16855.\end{aligned}$$

Nun bestimmen wir den Erwartungsnutzen bei Abschluss einer Versicherung. Die Höhe der Versicherungsprämie ergibt sich je nach Höhe der Versicherungssumme:

Versicherungssumme	Prämie
30 000	$30 + 0,01 \cdot 5\,000 + 0,005 \cdot 10\,000 + 0,005 \cdot 30\,000$ = 280
40 000	327
50 000	374

Der Erwartungsnutzen errechnet sich wie folgt:

Versicherungssumme	Erwartungsnutzen
30 000	$0,995 \cdot \ln(50\,000 + (20\,000 - 280) \cdot 1,07)$ $+ 0,005 \cdot \ln(30\,000 + (20\,000 - 280) \cdot 1,07)$ = 11,1702
40 000	$0,995 \cdot \ln(50\,000 + (20\,000 - 327) \cdot 1,07)$ $+ 0,005 \cdot \ln(40\,000 + (20\,000 - 327) \cdot 1,07)$ = 11,17038
50 000	$1 \cdot \ln(50\,000 + (20\,000 - 374) \cdot 1,07)$ = 11,17043

Herr Schäfer schliesst also eine Versicherung in voller Höhe ab, da dieses Versicherungsvolumen den höchsten Erwartungsnutzen stiftet.

- (b) Herr Schäfer kann nun € 320 000,- in die Geldanlage investieren. Daraus ergibt sich im Schadensfall ohne Versicherung:

$$\begin{aligned}
 E(u(w)) &= 0,98 \cdot \ln(50\,000 + 320\,000 \cdot 1,07) \\
 &\quad + 0,01 \cdot \ln(45\,000 + 320\,000 \cdot 1,07) \\
 &\quad + 0,005 \cdot \ln(40\,000 + 320\,000 \cdot 1,07) \\
 &\quad + 0,005 \cdot \ln(320\,000 \cdot 1,07) \\
 &= 12,879098.
 \end{aligned}$$

Mit Versicherung errechnet man:

Versicherungssumme	Erwartungsnutzen
30 000	$0,995 \cdot \ln(50\,000 + (320\,000 - 280) \cdot 1,07)$ $+ 0,005 \cdot \ln(30\,000 + (320\,000 - 280) \cdot 1,07)$ $= 12,879011$
40 000	$0,995 \cdot \ln(50\,000 + (320\,000 - 327) \cdot 1,07)$ $+ 0,005 \cdot \ln(40\,000 + (320\,000 - 327) \cdot 1,07)$ $= 12,879016$
50 000	$1 \cdot \ln(50\,000 + (320\,000 - 374) \cdot 1,07)$ $= 12,879017$

Herr Schäfer schließt keine Versicherung ab, da er ohne Versicherung einen höheren Erwartungsnutzen erzielt.

- 8.3. (a) Herr Knusper ist risikoneutral (lineare Nutzenfunktion); Herr Schleck ist für $0 \leq z \leq 60\,000$ risikofreudig (konvexe Nutzenfunktion) und für $60\,000 < z \leq 120\,000$ risikoavers (konkave Nutzenfunktion).
- (b) Der erwartete Nutzen bei Entscheidung für eines der Produkte A oder B ergibt sich als mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichtete Summe der Nutzen in den jeweiligen Umweltzuständen:

	$u(z_1)$	$u(z_2)$	$u(z_3)$	
	$p_1 = 0,35$	$p_2 = 0,5$	$p_3 = 0,15$	$E(u(Z))$
Knusper: A	60 000	90 000	120 000	84 000
B	84 000	84 000	84 000	84 000
Schleck: A	60 000	105 000	120 000	91 500
B	98 400	98 400	98 400	98 400

Herr Knusper ist zwischen beiden Produkten indifferent, wohingegen Herr Schleck das sichere Produkt B vorzieht.

- (c) Die Entscheidungsmatrizen lauten nun:

	$u(z_1)$	$u(z_2)$	$u(z_3)$	
	$p_1 = 0,35$	$p_2 = 0,5$	$p_3 = 0,15$	$E(u(Z))$
Knusper: A	0	30 000	60 000	24 000
B	24 000	24 000	24 000	24 000
Schleck: A	0	15 000	60 000	16 500
B	9 600	9 600	9 600	9 600

Herr Schleck ändert seine Entscheidung zugunsten des riskanten Produkts A. Durch die Berücksichtigung der zusätzlichen Fixkosten fallen die Ergebnisse in den risikofreudigen Bereich der Nutzenfunktion von Herrn Schleck. Dementsprechend zieht er nun das unsichere Produkt A vor.

- 8.4. (a) Die Ableitungen der Nutzenfunktion sind wie folgt zu interpretieren:
- $u'(\cdot) > 0$: Die Nutzenfunktion ist (streng) monoton wachsend. Diese Eigenschaft wird häufig mit den Begriffen „Gier“ oder „Unersättlichkeit“ umschrieben.
- $u''(\cdot) < 0$: Der Grenznutzen ist (streng) monoton fallend, die Nutzenfunktion also (streng) konkav; d. h. formal:

$$u(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) > \lambda u(z_1) + (1 - \lambda)u(z_2); \quad \lambda \in (0,1) .$$

Der Entscheidungsträger ist risikoavers. Er präferiert sichere Zahlungen gegenüber risikobehafteten Zahlungen mit gleichem Erwartungswert.

- $u'''(\cdot) > 0$: Abnehmende Risikoaversion impliziert $u'''(\cdot) > 0$; d. h. die vom Entscheidungsträger geforderte Risikoprämie nimmt mit zunehmendem Anfangsvermögen ab. Hierfür ist der Begriff „Vorsicht“ gebräuchlich.
- (b) Die Voraussetzungen an die Nutzenfunktion $u(z) = -e^{-az}$ sind für $a > 0$ erfüllt:

$$\begin{aligned} u'(z) &= ae^{-az} > 0 , \\ u''(z) &= -a^2 e^{-az} < 0 , \\ u'''(z) &= a^3 e^{-az} > 0 . \end{aligned}$$

Das Arrow-Pratt-Maß für die absolute Risikoaversion lautet:

$$ARA(z) = -\frac{u''(z)}{u'(z)} = a .$$

Der Parameter a der Risikonutzenfunktion $u(z) = -e^{-az}$, $z, a > 0$ bezeichnet also die konstante absolute Risikoaversion des Investors.

- (c) (i) Die Nutzenfunktion

$$u(z) = (az + b)^{1-\frac{1}{a}}, \quad z, a, b \geq 0$$

ist zweimal differenzierbar. Die Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} u'(z) &= (a-1)(az+b)^{-\frac{1}{a}} , \\ u''(z) &= -(a-1)(az+b)^{-\left(1+\frac{1}{a}\right)} . \end{aligned}$$

Das Arrow-Pratt-Maß $ARA(z)$ für die absolute Risikoaversion lautet dann:

$$ARA(z) = -\frac{u''(z)}{u'(z)} = \frac{1}{az+b} .$$

- (ii) Die absolute Risikoaversion $ARA(z)$ ist nur im Falle $a = 0$ konstant. Gerade dieser Fall ist aber ausgeschlossen; d. h. eine konstante absolute Risikoaversion ist für die angegebene Nutzenfunktion nicht darstellbar. Die relative Risikoaversion ist durch

$$RRA = -\frac{u''(z)}{u'(z)}z = \frac{z}{az+b}$$

gegeben. Für eine konstante relative Risikoaversion ist lediglich $b = 0$ zu fordern; denn dann gilt:

$$RRA = -\frac{u''(z)}{u'(z)}z = \frac{1}{a}.$$

- 8.5. (a) Die Risikonutzenfunktion u des Investors muss folgenden Bedingungen genügen: $u'(R) \geq 0$ und $u''(R) \leq 0$. Weiter müssen entweder die Rückflüsse R der betrachteten Investitionsalternativen normalverteilt sein oder die Risikonutzenfunktion des Investors eine quadratische Form besitzen:

$$u(R) = a + bR + cR^2 \quad \text{mit } b > 0 \text{ und } c < 0.$$

Der Scheitelpunkt der quadratischen Nutzenfunktion muss dabei rechts vom maximalen Rückfluss $R_{\max}$ liegen. Darüber hinaus existieren spezielle Kombinationen (hybride Modelle), die bestimmte Nutzenfunktionen des Investors (tastes) mit gewissen Verteilungsfunktionen der unsicheren Portfeuille-Rückflüsse (beliefs) kombinieren.

- (b) Es muss gelten:

$$u'(R) = 1 + 2bR \geq 0 \quad \text{und} \quad u''(R) = 2b \leq 0.$$

Wegen der Konkavität ($u'' \leq 0$) folgt $b \leq 0$. Aus der Bedingung des positiven Grenznutzen ($u'(R) \geq 0$) folgt:

$$R \leq -\frac{1}{2b}.$$

Um die Bedingung $u' \geq 0$ nicht zu verletzen, müssen die Rückflüsse der betrachteten Investitionsalternativen beschränkt sein, da ab $-1/(2b)$ die Risikonutzenfunktion monoton fällt. Graphisch hat diese quadratische Risikonutzenfunktion folgendes Aussehen:

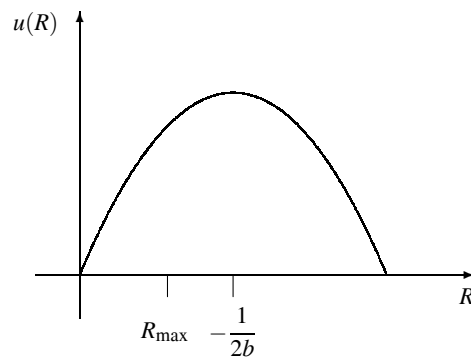


Abb. L.19. Aufgabe 8.5.(b).

Es gilt:

$$E(u(R)) = E(R) + bE(R^2)$$

und mit

$$\text{Var}(R) = E(R - E(R))^2 = E(R^2) - (E(R))^2$$

folgt:

$$E(u(R)) = E(R) + b(E(R))^2 + \text{Var}(R) .$$

Der Erwartungsnutzen lässt sich also allein auf Basis von $E(R)$ und $\text{Var}(R)$ darstellen. Wegen

$$\frac{\partial E(u(R))}{\partial E(R)} = 1 + 2bE(R) \geq 0$$

und

$$\frac{\partial E(u(R))}{\partial \text{Var}(R)} = b \leq 0$$

steigt der gemäß Bernoulli-Regel zu bestimmende Erwartungsnutzen mit zunehmendem erwartetem Rückfluss und fällt mit zunehmender Varianz des Rückflusses. Genauso wird gemäß EV-Regel eine Dominanz einer Investition aufgrund eines höheren Erwartungswerts (bei gleicher oder geringerer Varianz) oder auch aufgrund einer geringeren Varianz (bei gleichem oder höherem Erwartungswert) festgestellt. Wird also eine Auswahl mit der EV-Regel auf Basis von Erwartungswert und Varianz getroffen, so ist diese Entscheidung mit der Bernoulli-Regel konsistent.

- (c) Ein risikoneutraler Investor entscheidet sich gemäß Bernoulli-Regel für die Alternative mit dem größten Erwartungswert. Daher ist die Entscheidung für die vierte Alternative richtig.

Gemäß EV-Regel wird eine Investition i gegenüber einer Investition j bevorzugt, falls gilt:

$$E(R_i) > E(R_j) \text{ und } \sigma_i \leq \sigma_j$$

oder

$$E(R_i) \geq E(R_j) \text{ und } \sigma_i < \sigma_j .$$

Da unter den vier Investitionen eine solche Beziehung nicht gilt, kann gemäß EV-Regel eine Dominanz einer Investition nicht festgestellt und somit die vierte Investition auch nicht ausgeschlossen werden. Die Entscheidung der risikoneutralen Investoren für die vierte Investition widerspricht also nicht der EV-Regel.