
Lösungsteil

Lösungen zu Kapitel 2

- 2.1. Mit dem Wunsch nach maximalem Konsumnutzen lautet die Zielfunktion des Optimierungsproblems: $U(C_0, C_1) = \sqrt{C_0} \cdot C_1 \rightarrow \max$. Gleichzeitig gilt die folgende Budgetrestriktion: $C_1 = (K - C_0)(1 + r)$. Mit Hilfe der Lagrangefunktion $L(C_0, C_1, \lambda) = \sqrt{C_0} \cdot C_1 - \lambda [C_1 - (K - C_0) \cdot (1 + r)]$ erhält man die folgenden Optimalitätsbedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial L(C_0^*, C_1^*, \lambda^*)}{\partial C_0} = 0,5 \cdot C_0^{*-0,5} \cdot C_1^{*0,5} - \lambda^* \cdot (1 + r) \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\frac{\partial L(C_0^*, C_1^*, \lambda^*)}{\partial C_1} = 0,5 \cdot C_0^{*0,5} \cdot C_1^{*-0,5} - \lambda^* \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\frac{\partial L(C_0^*, C_1^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = -C_1^* + (K - C_0^*) \cdot (1 + r) \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus den oberen beiden Optimalitätsbedingungen ergibt sich $C_1^* = C_0^* \cdot (1 + r)$. Einsetzen dieses Zusammenhangs in die dritte Optimalitätsbedingung liefert den optimalen Konsumplan $C_0^* = K/2$ und somit $C_1^* = K(1 + r)/2$.

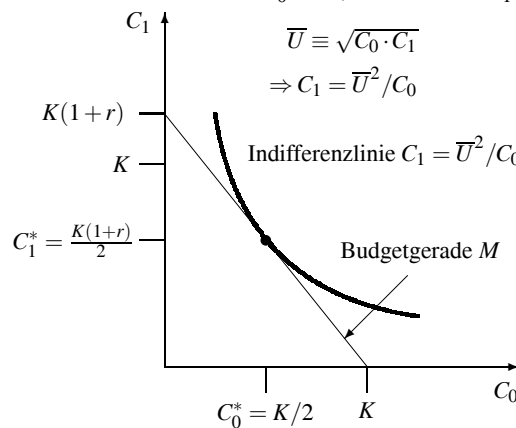


Abb. L.1. Aufgabe 2.1.

Unter der angenommenen Nutzenfunktion ist es für den Investor also optimal, seinen Kassenbestand zur Hälfte für Konsumzwecke zu verwenden. Die andere Hälfte seines Anfangsbestands legt er zum Zinssatz r am Finanzmarkt an und kann somit in $t = 1$ die Rückflüsse aus der Finanzanlage in Höhe von $K(1 + r)/2$ konsumieren.

- 2.2. Der Investor maximiert die Nutzenfunktion $U(C_0, C_1) = C_0(C_0 + C_1)$ unter folgender Nebenbedingung: Der spätere Konsum C_1 ergibt sich aus dem nicht-konsumierten verzinsten Teil des Anfangsbestandes K : $C_1 = (K - C_0)(1 + r)$. Mit der Lagrangefunktion $L(C_0, C_1, \lambda) = C_0(C_0 + C_1) - \lambda [C_1 - (K - C_0)(1 + r)]$ erhält man die folgenden Optimalitätsbedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial L(\hat{C}_0, \hat{C}_1, \hat{\lambda})}{\partial C_0} = 2\hat{C}_0 + \hat{C}_1 - \hat{\lambda} \cdot (1 + r) \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\frac{\partial L(\hat{C}_0, \hat{C}_1, \hat{\lambda})}{\partial C_1} = \hat{C}_0 - \hat{\lambda} \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\frac{\partial L(\hat{C}_0, \hat{C}_1, \hat{\lambda})}{\partial \lambda} = -\hat{C}_1 + (K - \hat{C}_0) \cdot (1 + r) \stackrel{!}{=} 0.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich $\hat{C}_1 = \hat{C}_0 \cdot (r - 1)$. Einsetzen dieses Zusammenhangs in die dritte Optimalitätsbedingung liefert

$$\hat{C}_0 = \frac{K(1+r)}{2r} \quad \text{und somit} \quad \hat{C}_1 = \frac{K(1+r)(r-1)}{2r}.$$

Für einen (realistischen) Zinssatz $r < 100\%$ würde der optimale Konsum in $t = 1$ also negativ. Dieser Fall ist nicht sinnvoll. Das globale Nutzenoptimum wird daher „am Rand“ angenommen, d. h. für ausschließlichen Konsum zum heutigen oder späteren Zeitpunkt. Aus der Gestalt der Nutzenfunktion erkennt man, dass ein maximaler späterer Konsum C_1 , der mit vollständigem Konsumverzicht zum heutigen Zeitpunkt ($C_0 = 0$) verbunden ist, keinen Nutzen stiften würde. Daher lautet der optimale Konsumplan: $C^* = (C_0^*; C_1^*) = (K; 0)$.

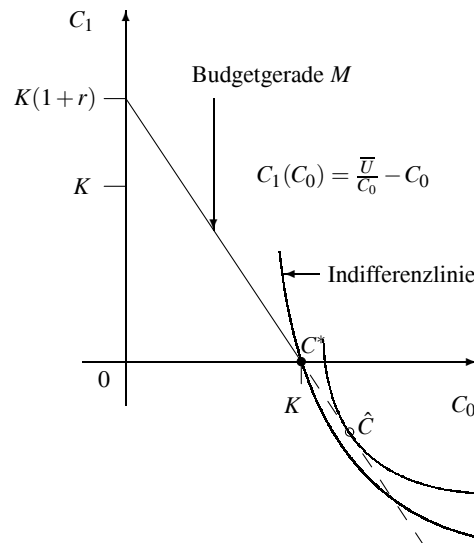


Abb. L.2. Aufgabe 2.2.

Mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes erhält man als Lösung den Konsumplan $\hat{C} = (\hat{C}_0; \hat{C}_1)$, dieser erfüllt jedoch nicht die Bedingung $\hat{C}_1 \geq 0$ und ist somit keine zulässige Lösung des Konsumnutzenmaximierungsproblems (vgl. Anhang 2A). Der optimale (zulässige) Konsumplan ist in diesem Fall eine Randlösung: $C^* = (K; 0)$.

2.3.

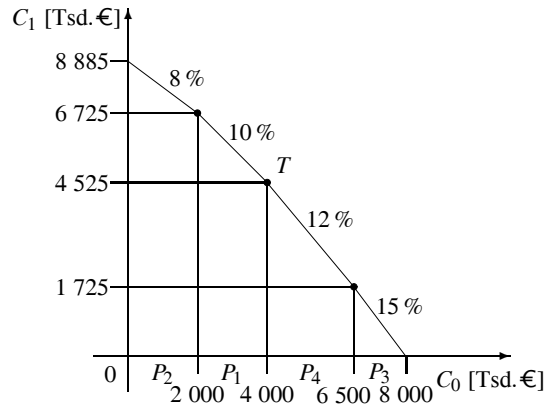


Abb. L.3. Aufgabe 2.3.
Für die Renditen R_i der einzelnen Investitionsprojekte ($i = 1, \dots, 4$) gilt: $R_1 = 10\%$, $R_2 = 8\%$, $R_3 = 15\%$ und $R_4 = 12\%$. Werden die Investitionsprojekte nach fallender Rendite angeordnet, so ergibt sich die nebenstehende Transformationskurve T .¹

Das Unternehmen wählt — unabhängig von Konsumpräferenzen — diejenigen Investitionsprojekte, deren Renditen höher als der Finanzmarktzinssatz sind. Daher besteht der optimale Realinvestitionsplan aus den Projekten 1, 3 und 4.

Die Nutzenfunktion $U(C_0, C_1) = 2C_0 + C_1$ besagt, dass der Konsum einer Einheit in $t = 0$ doppelt so hoch geschätzt wird wie der Konsum einer Einheit in $t = 1$. Formal haben daher die Indifferenzlinien des Investors die Gestalt $C_1 = -2C_0 + \bar{U}$.

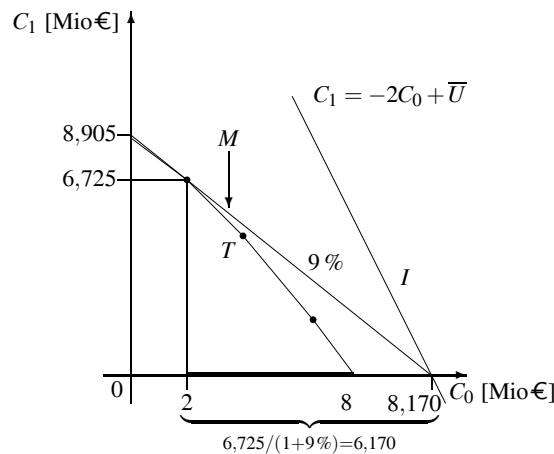


Abb. L.4. Aufgabe 2.3.
Der Investor investiert in $t = 0$ 6 Mio€ in die Realinvestitionen und konsumiert 8,170 Mio€. Für diese Ausgaben reicht sein Kassenbestand nicht aus, so dass er einen Kredit in Höhe von 6,170 Mio€ aufnehmen muss. Diesen kann er samt Zinsen in $t = 1$ mit Hilfe der Rückflüsse aus den Realinvestitionen zurückzahlen, da er keine Konsumausgaben tätigt.

Da die Steigung der Indifferenzlinie mit -2 geringer als die der Budgetgerade mit $-1,09$ ist, muss in $t = 0$ der höchstmögliche Betrag konsumiert werden.

¹ Sind keine Kreditaufnahmen möglich, so kann neben den Projekten 1, 3 und 4 Projekt 2 nur zu 2/3 durchgeführt werden.

Somit gilt für den nutzenmaximalen Konsumplan:

$$C^* = (C_0^*; C_1^*) = (K + PV^*; 0) = (8\,169,72; 0) \quad (\text{in Tsd. €}).$$

2.4. (a)

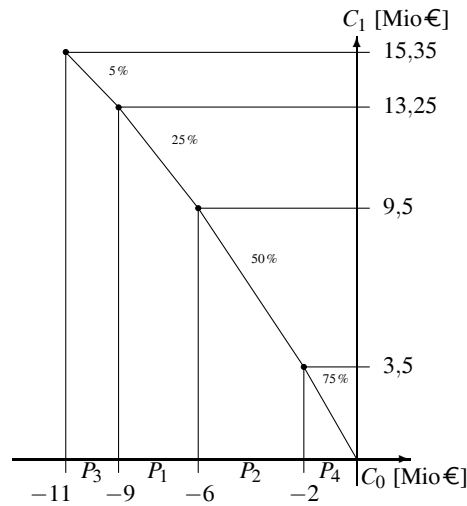


Abb. L.5. Aufgabe 2.4 (a). Da kein Anfangsbestand vorhanden ist, liegt die Transformationskurve für $t = 0$ im „negativen Konsumraum“. (In Teilaufgabe (c) zeigt sich, dass die Auszahlungen für Investitionen durch Kreditaufnahmen finanziert werden.)

- (b) Der optimale Realinvestitionsplan beinhaltet diejenigen Investitionsprojekte, deren Barwert positiv ist bzw. deren Rendite über dem Finanzmarktzinssatz liegt. Offenbar sind dies die Projekte 1, 2 und 4 mit den zugehörigen Renditen $R_1 = 25\%$, $R_2 = 50\%$ und $R_4 = 75\%$. Das Projekt 3, mit einer Rendite von $R_3 = 5\%$, wird nicht durchgeführt.
- (c) Die Budgetgerade beschreibt die Möglichkeiten, Konsum durch Finanzanlagen bzw. -aufnahmen zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ zu transformieren. Da der Zinssatz auf dem Finanzmarkt 10% beträgt, ist die Steigung der Budgetgerade $-1,1$. Gleichzeitig haben die Indifferenzlinien des Unternehmens für ein konstantes Nutzenniveau \bar{U} die Form $C_1(C_0) = \bar{U}^2 - C_0$. Die Indifferenzlinien sind daher linear und weisen die Steigung -1 auf. Die Steigung der Indifferenzlinie ist daher betragsmäßig geringer als die Steigung der Budgetgerade. Hieraus resultiert, dass der nutzenoptimale Konsumplan ausschließlichen Konsum zum Zeitpunkt $t = 1$ vorsieht. Der optimale Konsumplan lautet also:

$$C^* = (C_0^*; C_1^*) = (0; (K + PV^*) \cdot (1 + r)) = (0; 3\,350) \quad (\text{in Tsd. €}),$$

wobei $PV^* = -9\,000 + \frac{13\,250}{1+10\%} = 3\,045,45$ Tsd. € den Barwert des optimalen Realinvestitionsplans bezeichnet.

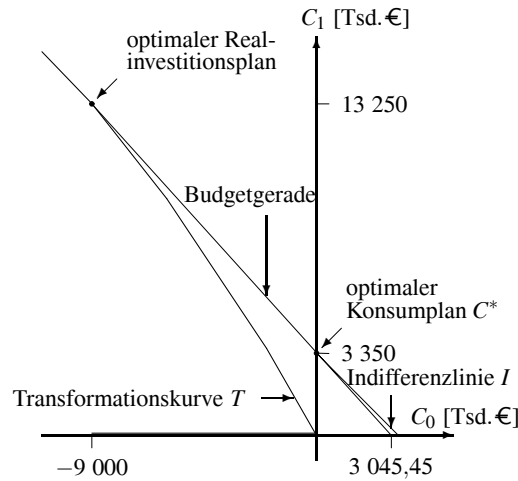


Abb. L.6. Aufgabe 2.4 (c). Der Investor verzichtet im Zeitpunkt $t = 0$ auf Konsum und konsumiert in $t = 1$ die Investitionsrückflüsse (13 250 Tsd.€) abzüglich der Zins- und Tilgungszahlungen (9 900 Tsd.€). Letztere werden für den Kredit in Höhe von $RIV^* = 9\,000$ Tsd.€, den der Investor in $t = 0$ zur Finanzierung der Realinvestition aufnehmen muss, fällig.

2.5. (a)

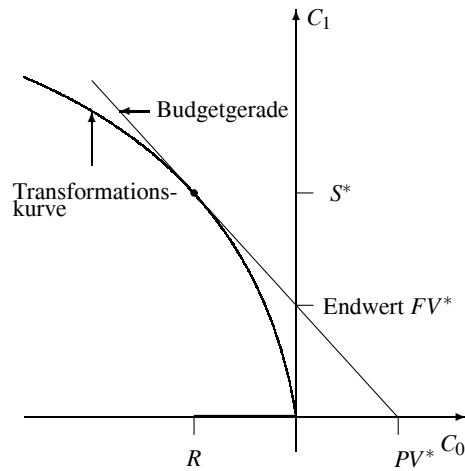


Abb. L.7. Aufgabe 2.5 (a). Das optimale Realinvestitionsvolumen $RIV^* = -R$ ergibt sich aus dem Berührungspunkt der Transformationskurve mit der Budgetgeraden. Der Barwert PV^* des optimalen Realinvestitionsplans entspricht der Länge der Strecke zwischen dem Ursprung (Kassenbestand ist hier null) und dem effizienten Konsumplan, der einen ausschließlichen Konsum in $t = 0$ repräsentiert.

- (b) Das optimale Realinvestitionsvolumen ist erreicht, wenn die Grenzrendite r bzw. die Steigung der Transformationskurve $-(1+r)$ beträgt:²

$$-S'(RIV^*) = -2,2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{RIV^*}} \stackrel{!}{=} -1,1$$

$$\Rightarrow RIV^* = 1 \text{ GE} \quad \text{und damit} \quad S^* = S(RIV^*) = 2,2 \text{ GE}.$$

Der Barwert des optimalen Realinvestitionsplans lautet:

$$PV^* = -RIV^* + \frac{S(RIV^*)}{1 + 10\%} = -1 + \frac{2,2}{1,1} = 1 \text{ GE}.$$

² Wegen $C_0 = K - RIV$ gilt für den funktionalen Zusammenhang zwischen der Transformationskurve T und der Investitionsfunktion S : $T(C_0) = S(K - C_0) = S(RIV)$ und damit $T'(C_0) = \frac{dT}{dC_0}(C_0) = -\frac{dS}{dRIV}(RIV) = -S'(RIV)$.

Der zugehörige Endwert entspricht dem aufgezinnten Barwert:

$$FV^* = PV^* \cdot 1,1 = 1,1 \text{ GE} .$$

(c) Der Investor maximiert seine Nutzenfunktion

$$U(C_0, C_1) = C_0 \cdot C_1 \rightarrow \max$$

unter der Nebenbedingung $C_1 = (PV^* - C_0)(1+r)$. Der Investor kann nämlich in $t = 0$ maximal den Barwert konsumieren, da kein Anfangsbestand vorhanden ist. Mit Hilfe der Lagrangefunktion

$$L(C_0, C_1, \lambda) = C_0 \cdot C_1 - \lambda [C_1 - (PV^* - C_0) \cdot (1+r)]$$

erhält man die folgenden Optimalitätsbedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial L(C_0^*, C_1^*, \lambda^*)}{\partial C_0} = C_1^* - \lambda^* \cdot (1+r) \stackrel{!}{=} 0 ,$$

$$\frac{\partial L(C_0^*, C_1^*, \lambda^*)}{\partial C_1} = C_0^* - \lambda^* \stackrel{!}{=} 0 ,$$

$$\frac{\partial L(C_0^*, C_1^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = -C_1^* + (PV^* - C_0^*) \cdot (1+r) \stackrel{!}{=} 0 .$$

Aus den ersten beiden Bedingungen ergibt sich $C_1^* = C_0^* \cdot (1+r)$. Einsetzen dieses Zusammenhangs in die dritte Optimalitätsbedingung liefert $C_0^* = PV^*/2 = 0,5 \text{ GE}$ und somit $C_1^* = PV^*(1+r)/2 = 0,55 \text{ GE}$.

Der Investor nimmt in $t = 0$ einen Kredit in Höhe von 1,5 GE auf, um die Realinvestition (1 GE) tätigen und 0,5 GE konsumieren zu können. Der Rückfluss $S^* = S(RIV^*) = 2,2 \text{ GE}$ aus der Realinvestition in $t = 1$ reicht aus, um den Kredit samt Zinsen (1,65 GE) zurück zu zahlen und 0,55 GE konsumieren zu können.

(d) Finanzanlagen oder Kreditaufnahmen am vollkommenen Finanzmarkt haben keinen Einfluss auf den Barwert des Investitionsplans, da der Barwert solcher Maßnahmen jeweils null ist.

2.6. Die Nutzenfunktion $U(C_0, C_1) = 2C_0 + C_1$ besitzt lineare Indifferenzlinien mit der Steigung -2 . Diese Linien haben eine kleinere Steigung als die Segmente für Finanzmarkttransaktionen. Daher wird ein ausschließlicher Konsum in $t = 0$ präferiert. Der Investor wird also in $t = 0$ den Kassenbestand und den Barwert des optimalen Realinvestitionsplans konsumieren. Somit entspricht der für den Investor relevante Kalkulationszinssatz dem Kreditzinssatz in Höhe von 15%. Die Investitionsprojekte haben die folgenden Renditen: $R_3 = 20\%$, $R_4 = 12\%$, $R_1 = 10\%$ und $R_2 = 5\%$. Nur das Investitionsprojekt 3 weist mit 20% eine höhere Rendite als die einer Kreditaufnahme auf und stellt daher den optimalen Realinvestitionsplan dar.

- 2.7. (a) Für die Realinvestitionsvolumina, die sich auf Basis des Haben- bzw. Sollzinssatzes ergeben, gilt:

$$\begin{aligned} S'(RIV^H) = 1 + r^H &\implies 1\,000 \cdot \frac{1}{2\sqrt{RIV^H}} \stackrel{!}{=} 1,03 \\ &\implies RIV^H = 235\,648,98\text{€}; \\ S'(RIV^S) = 1 + r^S &\implies 1\,000 \cdot \frac{1}{2\sqrt{RIV^S}} \stackrel{!}{=} 1,06 \\ &\implies RIV^S = 222\,499,11\text{€}. \end{aligned}$$

Die Indifferenzlinien stellen Geraden mit einer Steigung von -4 dar. Die Indifferenzlinien sind somit „steiler“ als alle Segmente der Budgetkurve. Somit wird ein *ausschließlicher* Konsum in $t = 0$ präferiert. Der relevante Kalkulationszinssatz k ist somit gleich dem für Kreditaufnahmen. Für das optimale Investitionsvolumen RIV^* gilt deshalb: $RIV^* = RIV^S = 222\,499,11\text{€}$.

- (b) Für den Barwert der Realinvestition auf Basis des relevanten Kalkulationszinssatzes erhält man:

$$PV^* = -RIV^* + \frac{S(RIV^*)}{1+k} = -222\,499,11 + \frac{471\,698,11}{1,06} = 222\,499,11\text{€}.$$

- (c) Gemäß den Überlegungen aus Aufgabenteil (a) ergibt sich für den optimalen Konsumplan:

$$C^* = (C_0^*; C_1^*) = (K + PV^*; 0) = (722\,499,11; 0) \quad (\text{in €}).$$

Dieser wird folgendermaßen realisiert: Da der Anfangsbestand des Investors in Höhe von $500\,000\text{€}$ nicht für den Konsum ($722\,499,11\text{€}$) und Realinvestition ($222\,499,11\text{€}$) ausreicht, nimmt er einen Kredit in Höhe von $444\,998,22\text{€}$ auf. Diesen kann er in $t = 1$ samt Zinsen mit den Rückflüssen aus der Realinvestition $S^* = 471\,698,11\text{€}$ zurückzahlen, da in $t = 1$ keine Konsumausgaben anfallen.

- (d) Die Kurve der effizienten Konsumpläne (Budgetkurve) setzt sich aus den beiden Geradenstücken C^*C^S und $C^H\tilde{C}$ sowie dem Stück der Transformationskurve, das durch die Konsumpläne $C^S = (R^S; S^S)$ und $C^H = (R^H; S^H)$ begrenzt wird, zusammen. Hierbei berechnen sich R^H , R^S , S^H und S^S wie folgt:

$$R^H = K - RIV^H, \quad R^S = K - RIV^S, \quad S^H = S(RIV^H) \quad \text{und} \quad S^S = S(RIV^S).$$

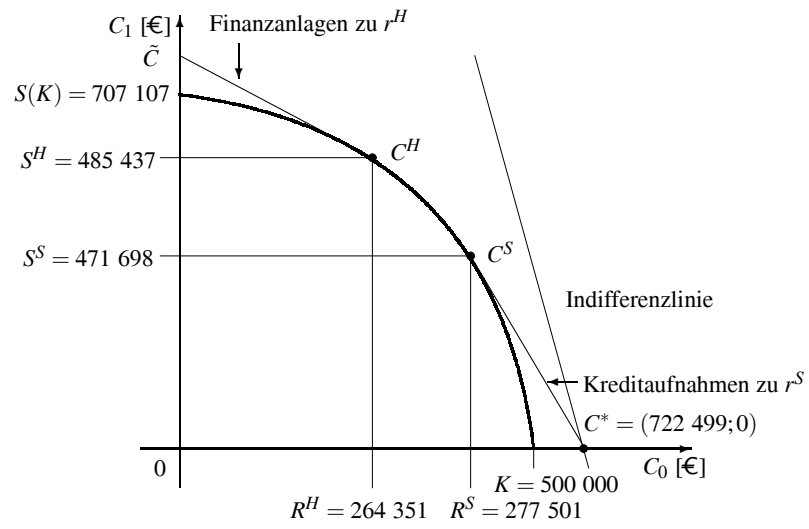
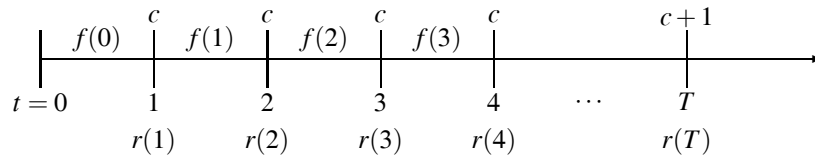


Abb. L.8. Aufgabe 2.7(d).

Lösungen zu Kapitel 3

3.1.



$f(t) \equiv$ der zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannte (annualisierte) Terminzinssatz („Forward Rate“) für einjährige Finanzanlagen für die Periode von t bis $t + 1$;

$r_t(T) \equiv$ (annualisierter) Kassazinssatz („Spot Rate“) für Finanzanlagen mit der Restlaufzeit T Jahre zum Zeitpunkt t ;

$r_t^y(T) \equiv$ (annualisierte) Verfallrendite („Yield to Maturity“) für Finanzanlagen mit der Restlaufzeit T Jahre zum Zeitpunkt t .

Zur Vereinfachung der Notation entfällt für den Zeitpunkt $t = 0$ der Index t , d. h.:

$$r(T) \equiv r_0(T) \quad \text{und} \quad r^y(T) \equiv r_0^y(T).$$

Insbesondere folgt damit: $f(0) = r(1)$.

Für die Bewertung einer Kupon-Anleihe mit jährlichen Kuponzahlungen in Höhe von c , Nennwert 1 und einer Laufzeit von T Jahren gilt:

- Darstellung durch die Terminzinssätze:

$$B_0^c(T) = \frac{c}{1+f(0)} + \dots + \frac{c+1}{(1+f(0)) \dots (1+f(T-1))} = \sum_{t=1}^T cq_t + 1 \cdot q_T$$

mit den Diskontierungsfaktoren

$$q_t \equiv \prod_{\tau=0}^{t-1} \frac{1}{1+f(\tau)} = \frac{1}{(1+f(0))(1+f(1)) \dots (1+f(t-1))}.$$

- Darstellung durch die Kassazinssätze:

$$\begin{aligned} B_0^c(T) &= \frac{c}{1+r(1)} + \frac{c}{(1+r(2))^2} + \dots + \frac{c+1}{(1+r(T))^T} \\ &= \sum_{t=1}^T \frac{c}{(1+r(t))^t} + \frac{1}{(1+r(T))^T}. \end{aligned}$$

- Darstellung durch die Verfallrenditen:

$$\begin{aligned}
 B_0^c(T) &= \frac{c}{1+r^y(T)} + \frac{c}{(1+r^y(T))^2} + \cdots + \frac{c+1}{(1+r^y(T))^T} \\
 &= \sum_{t=1}^T \frac{c}{(1+r^y(T))^t} + \frac{1}{(1+r^y(T))^T} \\
 &= \frac{c((1+r^y(T))^T - 1)}{(1+r^y(T))^T r^y(T)} + \frac{1}{(1+r^y(T))^T} .
 \end{aligned}$$

- 3.2. Beachtet man, dass der Barwert von Finanzanlagen am vollkommenen Finanzmarkt null beträgt, so ergibt sich:

$$PV^{\text{Zero}} = -82,46 + \frac{100}{(1+9\%)(1+f(1))} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 11,26\% .$$

- 3.3. (a) Aufgrund der angegebenen Kurse errechnen sich die Kassazinssätze wie folgt:

$$98,18 = \frac{108}{1+r(1)} \quad \Rightarrow \quad r(1) = 10\% ;$$

$$100,75 = \frac{8,5}{1,1} + \frac{108,5}{(1+r(2))^2} \quad \Rightarrow \quad r(2) = 8\% ;$$

$$104,23 = \frac{8,75}{1,1} + \frac{8,75}{1,08^2} + \frac{108,75}{(1+r(3))^3} \quad \Rightarrow \quad r(3) = 7\% .$$

Die Kassazinssätze $r(1) = 10\%$, $r(2) = 8\%$ und $r(3) = 7\%$ fallen mit der (Rest-) Laufzeit. Daher liegt eine inverse Zinsstruktur vor.

Mit den Kassazinssätzen sind die Terminzinssätze implizit gegeben:

$$f(0) = r(1) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 10\% ;$$

$$(1+f(0)) \cdot (1+f(1)) = (1+r(2))^2 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 6,04\% ;$$

$$(1+f(0)) \cdot (1+f(1)) \cdot (1+f(2)) = (1+r(3))^3 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 5,03\% .$$

- (b) Die Internen Zinsfüße der Kuponanleihe mit 2 Jahren Laufzeit und des Zero-Bonds errechnen sich wie folgt:

$$PV^Z(r) = -100,75 + \frac{117,69}{(1+r^y(2))^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad r^y(2) = 8,08\% ;$$

$$PV^K(r) = -100,75 + \frac{8,5}{1+r^y(2)} + \frac{108,5}{(1+r^y(2))^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow (r^y(2))^2 + 1,9156 \cdot r^y(2) - 0,1613 = 0$$

$$\Rightarrow r^y(2) = -0,9578 \pm 1,0386$$

$$\Rightarrow r^y(2) = 8,08\% \quad \text{bzw.} \quad r^y(2) = -199,64\% \quad (\text{nicht sinnvoll}) .$$

Die Internen Zinsfüße beider Anleihen stimmen also überein. Da auch die aktuellen Kurse gleich sind, werden die Titel vergleichbar, wenn man die Wiederanlage des Kupons vornimmt. Diese Wiederanlage erfolgt zum impliziten Terminzinssatz für die zweite Periode.

Wertpapier	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
Zero-Bond	-100,75	-	117,69
Kuponanleihe Wiederanlage zu $f(1) = 6,04\%$	-100,75	8,50 -8,50	108,50 9,01
Differenz	-	-	0,18

Die Interne Zinsfuß-Regel macht implizit die Wiederanlageannahme zum Internen Zinsfuß $r^y(2) = 8,08\%$. Aufgrund der vorliegenden Zinsstruktur geht diese Annahme aber fehl; vielmehr kann der Kupon in $t = 1$ nur zu einem niedrigeren Zinssatz $f(1) = 6,04\%$ wiederangelegt werden. Arbitrage ist daher möglich, indem der Zero-Bond gekauft und die Kupon-Anleihe verkauft werden.

- 3.4. Auf der Basis der Kapitalwertregel lässt sich der gegenwärtige Kurs S_0 einer Aktie aus der Summe der zukünftigen diskontierten Dividendenzahlungen erklären:

$$S_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DIV_t}{(1+r)^t}.$$

AG A: Hier gilt für die Dividenden: $DIV \equiv DIV_1 = DIV_2 = \dots$. Für den Kurs der Aktie folgt:

$$S_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DIV}{(1+r)^t} = \frac{1}{r} \cdot DIV.$$

AG B: Bei einer konstanten Wachstumsrate g der Dividenden gilt: $DIV_t = DIV_{t-1}(1+g) = \dots = DIV_0(1+g)^t$. D. h. für $-1 \leq g < r$ lässt sich der gegenwärtige Aktienkurs wie folgt erklären:

$$S_0 = DIV_0 \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^t = DIV_0 \frac{1+g}{r-g} = \frac{1}{r-g} DIV_1.$$

AG C: Bei einem gebrochenen Wachstum mit einer Wachstumsrate g_1 (bis zum Zeitpunkt t_1) und anschließend kontinuierlichen Wachstumsrate g_2 gilt mit $-1 \leq g_1, g_2 < r$:

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DIV_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{t_1} \left(\frac{1+g_1}{1+r} \right)^t DIV_0 + \frac{1}{(1+r)^{t_1}} S_{t_1} \\ &= \underbrace{\frac{1+g_1}{r-g_1} DIV_0}_{\text{konstantes Wachstum mit } g_1 \text{ ab } t=0} - \underbrace{\frac{1}{(1+r)^{t_1}} \frac{1+g_1}{r-g_1} DIV_{t_1}}_{\text{diskontiert auf } t=0} + \underbrace{\frac{1}{(1+r)^{t_1}} \frac{1+g_2}{r-g_2} DIV_{t_1}}_{\text{konstantes Wachstum mit } g_2 \text{ ab } t=t_1, \text{ diskontiert auf } t=0} \\ &= \frac{1+g_1}{r-g_1} DIV_0 \left(1 - \frac{g_1-g_2}{r-g_2} \left(\frac{1+g_1}{1+r} \right)^{t_1-1} \right). \end{aligned}$$

- 3.5. (a) Auf der Basis der Kapitalwertregel errechnet sich der aktuelle Preis der Aktie wie folgt:

$$S_0 = \frac{1+g}{r-g} \text{DIV}_0 = \frac{1+2,5\%}{0,08-0,025} \cdot 10 = 186,36\text{€}.$$

(b) Nach einem Jahr ergibt sich:

$$S_1 = \frac{1+g}{r-g} \text{DIV}_1 = \frac{1+2,5\%}{0,08-0,025} \cdot 10,25 = 191,02\text{€}.$$

Das bedeutet eine Kursänderung von $S_1 - S_0 = 4,66\text{€}$. Die prozentuale Kursänderung entspricht dem prozentualen Dividendenwachstum (2,5%).

3.6. (a) Die Beziehung für den Aktienkurs nach der Kapitalwertregel lautet bei gebrochenem Wachstum:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1+g_1}{r-g_1} \cdot \text{DIV}_0 \cdot \left(1 - \frac{g_1-g_2}{r-g_2} \left(\frac{1+g_1}{1+r} \right)^{t_1-1} \right) \\ &= \frac{1+7\%}{8\%-7\%} \cdot 10 \cdot \left(1 - \frac{7\%-5\%}{8\%-5\%} \left(\frac{1+7\%}{1+8\%} \right)^{5-1} \right) = 382,72\text{€}. \end{aligned}$$

(b) Nach einem Jahr gilt für den Aktienkurs:

$$S_1 = \frac{1+7\%}{8\%-7\%} \cdot 10,70 \cdot \left(1 - \frac{7\%-5\%}{8\%-5\%} \left(\frac{1+7\%}{1+8\%} \right)^{4-1} \right) = 402,64\text{€}.$$

Im Laufe eines Jahres kommt es daher zu einem Kursgewinn in Höhe von 19,92€ (5,2%).

3.7. Um den Aktienkurs in einem Jahr berechnen zu können, benötigt man die Wachstumsrate g . Diese wird wie folgt bestimmt:

$$S_0 = \frac{\text{DIV}_0(1+g)}{r-g} \implies 103 = \frac{4 \cdot (1+g)}{0,07-g} \implies g = 3\% < r.$$

Damit erhält man für den Aktienkurs in einem Jahr

$$S_1 = \frac{\text{DIV}_1(1+g)}{r-g} = \frac{\text{DIV}_0(1+g)^2}{r-g} = \frac{4 \cdot 1,03^2}{0,07-0,03} = 106,09\text{€}.$$

Somit wird die Unternehmensberatung aufgrund ihrer Daten einen Kursgewinn in Höhe von 3,09€ für das folgende Jahr prognostizieren.

3.8. (a) Vorteilhaftigkeitsüberprüfung ohne Berücksichtigung von Ertragsteuern (alle Angaben in Tsd.€):

t	0	1	2	3	4
Investition CF_t	-1 000	100	100	1 000	440
Kredit	800	—	—	-400	-400
Kreditzinsen	—	-160	-160	-160	-80
CF_t^s	-200	-60	-60	440	-40

Wegen $PV(k = 0,1) = -0,87 \text{ Tsd. €} < 0$ wird die Investition aufgrund der Kapitalwertregel nicht durchgeführt.

- (b) Vorteilhaftigkeitsüberprüfung mit Berücksichtigung von Ertragsteuern (alle Angaben in Tsd. €):

t	0	1	2	3	4
Investition CF_t	-1 000	100	100	1 000	440
Kredit	800	—	—	-400	-400
Kreditzinsen	—	-160	-160	-160	-80
Abschreibungen	—	(-500)	(-500)	—	—
Steuerbemessungsgrundlage	—	(-560)	(-560)	(840)	(360)
Steuern	0	252	252	-378	-162
CF_t^s	-200	192	192	62	-202

Wegen $PV(k = 0,1 \cdot 0,55 = 0,055) = 44,24 \text{ Tsd. €} > 0$ wird die Investition unter Berücksichtigung von Ertragsteuern durchgeführt. Den Effekt, dass sich die Entscheidung über Durchführung eines Projekts mittels der Kapitalwertregel durch Berücksichtigung von Steuern ändert, nennt man „Steuerparadoxon“.

- 3.9. Aus den Finanzierungsalternativen ergeben sich folgende Nettozahlungen (in €):

(a)

t	CF_t	Abschreibung	Steuern	CF_t^s
0	-100 000	—	—	-100 000
1	30 000	(25 000)	-2 250	27 750
2	30 000	(25 000)	-2 250	27 750
3	40 000	(25 000)	-6 750	33 250
4	40 000	(25 000)	-6 750	33 250

Für den Barwert gilt: $PV_{(a)}(k = 5,5\%) = 6 391,48 \text{ €} > 0$.

(b)

t	CF_t	Kredit	Zinsen	Abschreibung	Steuern	CF_t^s
0	-100 000	20 000	—	—	—	-80 000
1	30 000	—	-4 000	(25 000)	-450	25 550
2	30 000	—	-4 000	(25 000)	-450	25 550
3	40 000	-10 000	-4 000	(25 000)	-4 950	21 050
4	40 000	-10 000	-2 000	(25 000)	-5 850	22 150

Für den Barwert gilt hier: $PV_{(b)}(k = 5,5\%) = 2 979,79 \text{ €} > 0$.

Wegen $PV_{(b)}(k) = 2 979,79 \text{ €} < 6 391,48 \text{ €} = PV_{(a)}(k)$ wird sich der Investor für die vollständige Eigenfinanzierung entscheiden.

- 3.10. Bestimmung der optimalen Nutzungsdauer:

- (a) Die Entscheidungsregel lautet: Nutze das Fahrrad bis n^* , falls $X_{n^*} \geq 0$ und $X_{n^*+1} < 0$ gilt, wobei $X_t = z_t - (L_{t-1} - L_t) - rL_{t-1}$.

t	$z_t - (L_{t-1} - L_t) - rL_{t-1}$	X_t
1	$350 - (1 250 - 1 000) - 0,006 \cdot 1 250$	92,5
2	$300 - (1 000 - 800) - 0,006 \cdot 1 000$	94
3	$150 - (800 - 650) - 0,006 \cdot 800$	-4,8
4	$50 - (650 - 550) - 0,006 \cdot 650$	-53,9

Der Student ersetzt sein Fahrrad nach 2 Monaten (Ende April).

- (b) Die Entscheidungsregel lautet: Ersetze das erste Fahrrad in n^* , falls gilt: $Y_{n^*} \geq 0$ und $Y_{n^*+1} < 0$, wobei $Y_t = z_t - (L_{t-1} - L_t) - rL_{t-1} - rPVD_{t-1}^2 = X_t - rPVD_{t-1}^2$.

Bei einer Nutzungsdauer von 2 Monaten beträgt der Kapitalwert (des zweiten Fahrrads) bezogen auf den Ersatzzeitpunkt:

$$PVD_{n_1^*}^2 = -1\,250 + \frac{350}{1,006} + \frac{300 + 800}{1,006^2} = 184,83\text{€}.$$

t	$z_t - (L_{t-1} - L_t) - rL_{t-1} - rPVD_{t-1}^2$	Y_t
1	$350 - 250 - 0,006 \cdot (1\,250 + 184,83)$	91,39
2	$300 - 200 - 0,006 \cdot (1\,000 + 184,83)$	92,89
3	$150 - 150 - 0,006 \cdot (800 + 184,83)$	-5,91
4	$50 - 100 - 0,006 \cdot (650 + 184,83)$	-55,01

Der optimale Ersatzzeitpunkt bei einmaliger Reinvestition ist $n_1^* = 2$. Danach nutzt der Student das zweite Fahrrad ebenfalls zwei Perioden.

- 3.11. (a)

t	$z_t - (L_{t-1} - L_t) - rL_{t-1}$	X_t
1	$1\,400 - (2\,000 - 1\,400) - 200$	600
2	$1\,100 - (1\,400 - 900) - 140$	460
3	$700 - (900 - 400) - 90$	110
4	$420 - (400 - 0) - 40$	-20

Die optimale Nutzungsdauer ist somit $n^* = 3$.

- (b) Bei einer Nutzungsdauer von 3 Perioden beträgt der Kapitalwert bezogen auf den Ersatzzeitpunkt:

$$PVD_{n_1^*}^3 = -2\,000 + \frac{1\,400}{1,1} + \frac{1\,100}{1,1^2} + \frac{700 + 400}{1,1^3} = 1\,008,26\text{GE}.$$

t	$z_t - (L_{t-1} - L_t) - rL_{t-1} - rPVD_{t-1}^3$	Y_t
1	$1\,400 - 600 - 200 - 100,8$	499,2
2	$1\,100 - 500 - 140 - 100,8$	359,2
3	$700 - 500 - 90 - 100,8$	9,2
4	$420 - 400 - 40 - 100,8$	-120,8

Der optimale Ersatzzeitpunkt liegt in $n_1^* = 3$.

- (c) Die Entscheidungsregel lautet: Ersetze in n_1^* , falls gilt

$$Y_t = z_t^{\text{alt}} + L_t^{\text{alt}} - (1+r)L_{t-1}^{\text{alt}} - AF \cdot PV^{\text{neu}} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } t \leq n_1^* \\ \leq 0 & \text{für } t > n_1^* \end{cases}.$$

$AF \cdot PV^{\text{neu}}$ bezeichnet die Annuität der neuen Maschine und ist hier 250 GE.

t	$z_t^{\text{alt}} + L_t^{\text{alt}} - (1+r)L_{t-1}^{\text{alt}} - AF \cdot PV^{\text{neu}}$	Y_t
1	$1\ 200 + 1\ 200 - 1\ 980 - 250$	170
2	$900 + 700 - 1\ 320 - 250$	30
3	$800 + 300 - 770 - 250$	80
4	$300 + 0 - 330 - 250$	-280

Die alte Anlage sollte nach 3 Jahren ersetzt werden.

3.12. *Beweis der Regel 3.3.*

Die Nutzungsdauer n^* ist optimal, wenn der von der Nutzungsdauer abhängige Barwert

$$PVD(n^*) = \sum_{t=1}^{n^*} \frac{z_t}{(1+r)^t} + \frac{L_{n^*}}{(1+r)^{n^*}} - AA$$

maximal ist. Hierbei bezeichnet AA das Investitionsvolumen zum Zeitpunkt $t = 0$. Da die Funktion $PVD(n)$ als konkav vorausgesetzt wird, ist n^* genau dann die optimale Nutzungsdauer, wenn für die Zuwächse des Barwerts

$$\Delta PVD(t) = PVD(t) - PVD(t-1)$$

in Abhängigkeit der Nutzungsdauer t gilt:

$$\Delta PVD(t) \geq 0 \quad \text{für } t = 1, \dots, n^* \quad \text{und} \quad \Delta PVD(n^* + 1) < 0.$$

Dies ist wegen

$$\begin{aligned} \Delta PVD(t) &= PVD(t) - PVD(t-1) \\ &= \sum_{s=1}^t \frac{z_s}{(1+r)^s} + \frac{L_t}{(1+r)^t} - AA - \left(\sum_{s=1}^{t-1} \frac{z_s}{(1+r)^s} + \frac{L_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} - AA \right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^t} (z_t + L_t - (1+r)L_{t-1}) = \frac{1}{(1+r)^t} \cdot X_t \end{aligned}$$

genau dann der Fall, wenn für die Hilfsgröße X_t die Ungleichungen

$$X_t \geq 0 \quad \text{für } t = 1, \dots, n^* \quad \text{und} \quad X_{n^*+1} < 0$$

erfüllt sind. □

Beweis der Regel 3.4.

Der Ersatzzeitpunkt n_1^* sollte so gewählt werden, dass der von diesem Zeitpunkt abhängige Barwert der zweigliedrigen Investitionskette

$$PVD^G(n_1^*) = \sum_{t=1}^{n_1^*} \frac{z_t}{(1+r)^t} + \frac{L_{n_1^*}}{(1+r)^{n_1^*}} + \frac{PVD_{n_1^*}^2}{(1+r)^{n_1^*}} - AA$$

maximal ist. Hierbei bezeichnet AA das Investitionsvolumen zum Zeitpunkt $t = 0$ und $PVD_{n_1^*}^2$ den maximalen Kapitalwert der zweiten Investition bezogen auf

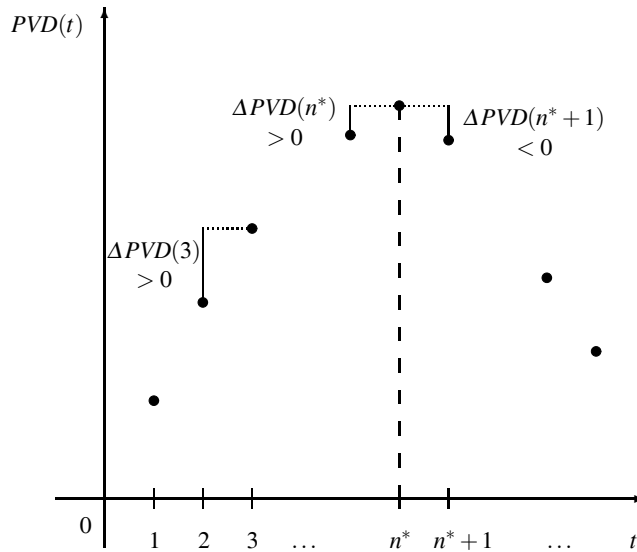


Abb. L.9. Barwertfunktion in Abhängigkeit der Nutzungsdauer (Beweis der Regel 3.3).

Die optimale Nutzungsdauer n^* ist genau dann erreicht, wenn die (konkave) Barwertfunktion $PVD(n)$ in Abhängigkeit der Nutzungsdauer n ihr Maximum annimmt. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein Vorzeichenwechsel bei den Zuwächsen des Barwerts $\Delta PVD(n)$ vorliegt.

den Zeitpunkt n_1^* . Da die Funktion $PVD^G(n)$ als konkav vorausgesetzt wird, sollte man die erste Realinvestition genau dann in n_1^* ersetzen, wenn für die Zuwächse des Barwerts

$$\Delta PVD^G(t) = PVD^G(t) - PVD^G(t-1)$$

in Abhängigkeit der Nutzungsdauer t gilt:

$$\Delta PVD^G(t) \geq 0 \quad \text{für } t = 1, \dots, n_1^* \quad \text{und} \quad \Delta PVD^G(n_1^* + 1) < 0.$$

Dies ist wegen

$$\begin{aligned} \Delta PVD^G(t) &= PVD^G(t) - PVD^G(t-1) \\ &= \sum_{s=1}^t \frac{z_s}{(1+r)^s} + \frac{L_t + PVD_t^2}{(1+r)^t} - AA \\ &\quad - \left(\sum_{s=1}^{t-1} \frac{z_s}{(1+r)^s} + \frac{L_{t-1} + PVD_{t-1}^2}{(1+r)^{t-1}} - AA \right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^t} (z_t + L_t - (1+r)L_{t-1} - r \cdot PVD_t^2) = \frac{1}{(1+r)^t} \cdot Y_t \end{aligned}$$

genau dann der Fall, wenn für die Hilfsgröße Y_t die Ungleichungen

$$Y_t \geq 0 \quad \text{für } t = 1, \dots, n_1^* \quad \text{und} \quad Y_{n_1^*+1} < 0$$

erfüllt sind. □

Beweis der Regel 3.5.

Bei einer unendlichen Kette identischer Investitionsobjekte hat jedes Glied gleich viele Nachfolgeinvestitionen. Daher muss für die Ersatzzeitpunkte n_1^* , n_2^* , ... gelten:

$$n_1^* = n_2^* = n_3^* = \dots \equiv n^* .$$

Der Ersatzzeitpunkt n^* sollte so gewählt werden, dass der von diesem Zeitpunkt abhängige Barwert der gesamten Investitionskette³

$$\begin{aligned} PVD^G(n^*) &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{\tau \cdot n^*}} \cdot \left(\sum_{t=0}^{n^*} \frac{z_t}{(1+r)^t} + \frac{L_{n^*}}{(1+r)^{n^*}} - AA \right) \\ &= \left(\sum_{t=0}^{n^*} \frac{z_t}{(1+r)^t} + \frac{L_{n^*}}{(1+r)^{n^*}} - AA \right) \cdot \frac{1}{1 - (1+r)^{-n^*}} \end{aligned}$$

maximal ist. Da die Funktion $PVD^G(t)$ als konkav vorausgesetzt wird, sollte man n^* so wählen, dass für die Zuwächse des Barwerts in Abhängigkeit des Ersatzzeitpunktes gilt:

$$\Delta PVD^G(t) \geq 0 \quad \text{für } t = 1, \dots, n^* \quad \text{und} \quad \Delta PVD^G(n^* + 1) < 0 .$$

Dies ist wegen

$$\begin{aligned} \Delta PVD^G(t) &= PVD^G(t) - PVD^G(t-1) \\ &= \left(\sum_{s=0}^t \frac{z_s}{(1+r)^s} + \frac{L_t}{(1+r)^t} - AA \right) \cdot \frac{1}{1 - q^{-t}} \\ &\quad - \left(\sum_{s=0}^{t-1} \frac{z_s}{(1+r)^s} + \frac{L_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} - AA \right) \cdot \frac{1}{1 - q^{-(t-1)}} \\ &= \left(K(t-1) + \frac{L_t}{q^t} + \frac{z_t}{q^t} - \frac{L_{t-1}}{q^{t-1}} \right) \cdot \frac{q^t}{q^t - 1} - K(t-1) \cdot \frac{q^{t-1}}{q^{t-1} - 1} \\ &= \left(L_t + z_t - L_{t-1}q - K(t-1) \frac{r \cdot q^{t-1}}{q^{t-1} - 1} \right) \cdot \frac{1}{q^t - 1} = \frac{1}{q^t - 1} \cdot Z_t \end{aligned}$$

genau dann der Fall, wenn für die Hilfsgröße Z_t die Ungleichungen

$$Z_t \geq 0 \quad \text{für } t = 1, \dots, n^* \quad \text{und} \quad Z_{n^*+1} < 0$$

erfüllt sind.

□

³ Hierbei wird die Summenformel $\sum_{i=0}^{\infty} y^i = 1/(1-y)$ für $|y| < 1$ verwendet.

Lösungen zu Kapitel 4

- 4.1. Als Duration bezeichnet man die mittlere, mit dem Barwert der Zahlungen gewichtete Restlaufzeit einer Anlage.

Da (neben der Anfangsauszahlung) bei einem Zero-Bond nur bei Fälligkeit in T eine Zahlung erfolgt, errechnet sich die Duration eines Zerobonds zu

$$D_{\text{Zero-Bond}} = \frac{T \cdot \text{PV}\{Z_T\}}{\text{PV}} = \frac{T \cdot \text{PV}\{Z_T\}}{\text{PV}\{Z_T\}} = T.$$

Für den Liquidationswert der Null-Kuponanleihe bezogen auf den Durationszeitpunkt $D = T$ gilt:

$$\text{PV}(r, D) = \frac{F}{(1+r)^T} \cdot (1+r)^D = \frac{F}{(1+r)^T} \cdot (1+r)^T = F,$$

d. h. der Liquidationswert der Null-Kuponanleihe im Durationszeitpunkt ist gleich dem Nennwert F der Null-Kuponanleihe und hängt somit nicht vom Zinsniveau r ab. Der Liquidationswert unterliegt also keinem Zinsänderungsrisiko.

- 4.2. Der Zahlungsstrom stellt sich wie folgt dar:

t	1	2	3	4
CF_t (in €)	60 000	60 000	560 000	1 060 000

Somit erhält man als Barwert der Zahlungsreihe

$$\text{PV} = \frac{60\,000}{1,08} + \frac{60\,000}{1,08^2} + \frac{560\,000}{1,08^3} + \frac{1\,060\,000}{1,08^4} = 1\,330\,674\text{€}.$$

Die Duration der Zahlungsreihe errechnet sich aus

$$D = \frac{1 \cdot 55\,556 + 2 \cdot 51\,440 + 3 \cdot 444\,546 + 4 \cdot 779\,132}{1\,330\,674} = 3,4634 \text{ (Jahre)}.$$

Der zur Sicherung gegenüber einer Zinssatzänderung zu emittierende Zero-Bond müsste im Volumen des Barwerts der Zahlungsreihe ausgegeben werden und eine Laufzeit von 3,4634 Jahren aufweisen. Der Rückzahlungsbetrag ergibt sich dann aus $1\,330\,674 \cdot (1 + 8\%)^{3,4634} = 1\,737\,121\text{€}$.

- 4.3. Es ist nachzuweisen, dass die Duration eines Portefeuilles von n festverzinslichen Wertpapieren der wertgewichteten Summe der Durationen der Einzelwertpapiere entspricht. Es genügt, diese Aussage für den Fall $n = 2$ zu zeigen, d. h. es muss $D_P = x_1 \cdot D_1 + x_2 \cdot D_2$ mit $x_1 = \text{PV}^1 / (\text{PV}^1 + \text{PV}^2)$ und $x_2 = \text{PV}^2 / (\text{PV}^1 + \text{PV}^2)$ nachgeprüft werden.

Es bezeichnen Z_t^i bzw. Z_t^P den Rückfluss des Wertpapiers i bzw. des Portefeuilles P im Zeitpunkt t und $\text{PV}^P = \text{PV}^1 + \text{PV}^2$ den Barwert des Portefeuilles. Dann erhält man für die Duration des Portefeuilles

$$\begin{aligned}
 D_P &= \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot \text{PV}\{Z_t^P\}}{PV^P} = \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot (\text{PV}\{Z_t^1\} + \text{PV}\{Z_t^2\})}{PV^P} \\
 &= \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot \text{PV}\{Z_t^1\}}{PV^P} + \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot \text{PV}\{Z_t^2\}}{PV^P} \\
 &= \frac{PV^1}{PV^P} \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot \text{PV}\{Z_t^1\}}{PV^1} + \frac{PV^2}{PV^P} \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot \text{PV}\{Z_t^2\}}{PV^2} \\
 &= x_1 \cdot D_1 + x_2 \cdot D_2 .
 \end{aligned}$$

4.4. (a) Für den Barwert der Anleihe gilt:

$$\text{Kurs} = \frac{400}{1,05} + \frac{420}{1,05^2} + \frac{441}{1,05^3} = 1\,142,8571 \text{ (in €)}.$$

Die Duration der Anleihe beträgt

$$D = \frac{1 \cdot \frac{400}{1,05} + 2 \cdot \frac{420}{1,05^2} + 3 \cdot \frac{441}{1,05^3}}{\text{Kurs}} = 2 \text{ (Jahre)}.$$

(b) Für die prozentuale Änderung des Barwertes gilt näherungsweise:

$$\frac{PV'(r)}{PV} = -\frac{1}{1+r} \cdot D = -\frac{1}{1,05} \cdot 2 = -1,9048 .$$

Ein Zinsschock, d. h. eine sofortige Erhöhung (Senkung) des Zinsniveaus um 1 %-Punkt, hat einen um — ungefähr — 1,9048 % niedrigeren (höheren) Barwert zur Folge. Der Kurs der Anleihe verringert (erhöht) sich daher um ca. $1\,142,8571 \cdot 1,9048 \% = 21,77$.

(c) Der Liquidationszeitpunkt, in dem man gegenüber Zinsschocks von 100 Basispunkten *immunisiert* ist, lautet:

$$t_{D(+100 \text{ BPe})} = \frac{\ln(V(0;0,06)/V(0;0,05))}{\ln(1,05/1,06)} = 1,9968 \text{ (Jahre)}.$$

Man ist zu diesem Zeitpunkt gegenüber Zinsänderungen um mehr als 100 Basispunkten und gegenüber allen Zinssenkungen abgesichert, jedoch nicht gegenüber Zinserhöhungen bis 100 Basispunkte. Dies wird durch die folgenden Kapitalwerte verdeutlicht:

Zinsänderung Δr in BPen	$V(r + \Delta r; 1,9968)$
-100	1 259,88233
0	1 259,80578
50	1 259,79635
100	1 259,80578
200	1 259,88018

(d) Bei Liquidation im Durationszeitpunkt $t^* = D = 2$ Jahren ist man gegenüber allen Zinsänderungen abgesichert. Denn wegen

$$V(D; r) = V(2; r) = 400(1+r) + 420 + \frac{441}{(1+r)};$$

$$\frac{\partial V(2; r)}{\partial r} = 400 - \frac{441}{(1+r)^2} \stackrel{!}{=} 0 \implies r = 5\%$$

und $\partial^2 V(2; 5\%) / \partial r^2 > 0$ nimmt der Kapitalwert bezogen auf den Durationszeitpunkt sein Minimum im aktuellen Zinsniveau $r_0 = 5\%$ an.

- (e) Die Arbitragestrategie, die von den Annahmen des Durationsmodells profitiert, sieht folgendermaßen aus:

Ein Arbitrageur kauft in $t = 0$ die betrachtete Anleihe und liquidiert sie im Durationszeitpunkt. Weiterhin emittiert er eine Null-Kuponanleihe mit Nominalwert $V(D, r_0) = 1\,260$ und einer Laufzeit, die der Duration entspricht.

Wertpapiere	$t = 0$	$t = 2$
Kauf der Anleihe	-1 142,8571	$\geq 1\,260$
Emission einer NKA mit $F = 1\,260$ und RLZ von 2 Jahren	1 142,8571	-1 260
Arbitragegewinn	0	≥ 0

- 4.5. (a) Für die Kurse der einzelnen Anleihen gilt

$$\text{Kurs}_1 = 100\text{€} \quad \text{und} \quad \text{Kurs}_2 = 100\text{€}.$$

Für die Durationen erhält man

$$D_1 = \frac{1 \cdot \frac{5}{1,05} + 2 \cdot \frac{105}{1,05^2}}{100} = 1,9524 \text{ (Jahre)} \quad \text{und}$$

$$D_2 = \frac{1 \cdot \frac{5}{1,05} + 2 \cdot \frac{5}{1,05^2} + 3 \cdot \frac{5}{1,05^3} + 4 \cdot \frac{5}{1,05^4} + 5 \cdot \frac{105}{1,05^5}}{100} = 4,5460 \text{ (Jahre)}.$$

- (b) Das Unternehmen kann sich für alle Zeithorizonte, die zwischen den Durationen der beiden Anlagen liegen, also für $t \in [1,9524; 4,5460]$, absichern. Denn den Liquidationswert des Anleiheportefeuilles kann man auf den Durationszeitpunkt D_P des Anleiheportefeuilles absichern. Durch Kombination der beiden Anleihen lassen sich wegen $D_P = x_1 D_1 + x_2 D_2$ mit $x_1, x_2 \geq 0$ und $x_1 + x_2 = 1$ alle Durationen zwischen der kleinsten und größten Duration der einzelnen Anleihen erreichen.
- (c) Damit der Anleger zum Zeitpunkt $t = 4$ keine Liquidationswertverluste erleidet, muss für die Duration des Portefeuilles gelten:

$$D_P = x_1 \cdot D_1 + x_2 \cdot D_2 \stackrel{!}{=} 4$$

$$\implies x_1 \cdot 1,9524 + (1 - x_1) \cdot 4,5460 = 4$$

$$\implies x_1 = \frac{4 - 4,5460}{1,9524 - 4,5460} = 21,05\% \quad \text{und} \quad x_2 = 1 - x_1 = 78,95\%.$$

Der Anleger muss also 21,05% bzw. 78,95% seines Investitionsvolumens in Anleihe 1 bzw. 2 investieren, um zum Zeitpunkt $t = 4$ abgesichert zu sein.

- 4.6. (a) Für den Kurs der Kuponanleihe erhält man

$$PV = \frac{5}{1,05} + \frac{5}{1,0525^2} + \frac{5}{1,055^3} + \frac{105}{1,06^4} = 96,7034 .$$

Die Effektive Duration beträgt:

$$D_{eff} = \frac{1 \cdot \frac{5}{1,05^2} + 2 \cdot \frac{5}{1,0525^3} + 3 \cdot \frac{5}{1,055^4} + 4 \cdot \frac{105}{1,06^5}}{PV} = 3,5063 .$$

- (b) Eine Parallelverschiebung im Zins um einen Prozentpunkt führt ungefähr zur folgenden Änderung im Kurs:

$$\Delta PV \approx -PV \cdot D_{eff} \cdot \Delta r = -96,7034 \cdot 3,5063 \cdot 0,01 = -3,39 .$$

D. h. der Kurs wird nach der Zinsänderung ungefähr 93,31 betragen.

- 4.7. (a) Für die Kassazinssätze erhält man:

$$-96,15 + \frac{100}{1+r(1)} = 0 \quad \implies \quad r(1) = 4,00\% ;$$

$$-90,70 + \frac{100}{(1+r(2))^2} = 0 \quad \implies \quad r(2) = 5,00\% ;$$

$$-83,96 + \frac{100}{(1+r(3))^3} = 0 \quad \implies \quad r(3) = 6,00\% .$$

Da $r(1) < r(2) < r(3)$ gilt, liegt eine normale Zinsstruktur vor.

- (b) Als Preis der dreijährigen Kuponanleihe, der mit der obigen Zinsstruktur konsistent ist, erhält man:

$$\text{konsistenter Emissionspreis} = PV = \frac{6}{1,04} + \frac{6}{1,05^2} + \frac{106}{1,06^3} = 100,21 .$$

- (c) Da eine Parallelverschiebung einer normalen Zinsstruktur vorliegt, ist das Konzept der Effektiven Duration anzuwenden. Die Effektive Duration beträgt

$$D_{eff} = \frac{1 \cdot \frac{6}{1,04^2} + 2 \cdot \frac{6}{1,05^3} + 3 \cdot \frac{106}{1,06^4}}{PV} = 2,6724 .$$

Mit Hilfe der Effektiven Duration erhält man als Näherung für die Änderung des Barwertes der dreijährigen Anleihe aus Aufgabenteil (b):

$$\Delta PV \approx -D_{eff} \cdot PV \cdot \Delta r = -2,6724 \cdot 100,21 \cdot 0,01 = -2,6780 .$$

D. h. der Preis der 3-jährigen Kuponanleihe wird bei einer sofortigen Parallelverschiebung des Zinsniveaus um einen Prozentpunkt nach oben um ungefähr 2,68 abnehmen.

- 4.8. (a) Mit $PV = 96,7034$ aus Teil (a) der Aufgabe 4.6 erhält man folgende Werte für die Key Rate-Durationen:

$$KRD_1 = \frac{1 \cdot \frac{5}{1,05^2}}{96,7034} = 0,0469; \quad KRD_2 = \frac{2 \cdot \frac{5}{1,0525^3}}{96,7034} = 0,0887;$$

$$KRD_3 = \frac{3 \cdot \frac{5}{1,055^4}}{96,7034} = 0,1252; \quad KRD_4 = \frac{4 \cdot \frac{105}{1,06^5}}{96,7034} = 3,2455.$$

Die Key Rate-Duration KRD_1 sagt z. B. aus, dass bei einer sofortigen Erhöhung (Senkung) der Key Rate $r_1 = r(1)$ um einen Prozentpunkt der Kurs der Anleihe um ungefähr 0,0469 Prozent sinkt (steigt). Für die anderen Key Rates gelten analoge Aussagen.

- (b) Die Änderung der Zinsstrukturkurve führt zur folgenden Kursänderung, die mit Hilfe der KRDs berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} \Delta PV &\approx -PV \cdot (KRD_1 \Delta r(1) + KRD_2 \Delta r(2) + KRD_3 \Delta r(3) + KRD_4 \Delta r(4)) \\ &= -96,7034 \cdot (0,0887 \cdot (-0,0015) + 0,1252 \cdot 0,001) = 0,0008. \end{aligned}$$

Der Kurs der Kuponanleihe steigt also nach Änderung der Zinsstruktur auf ungefähr 96,7042.