Das Standardmodell unter Unsicherheit ist ökonomisch unsinnig

Andreas Löffler[1]

Version vom 4. Juli 2003

[1]Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Universität Hannover, Königsworther Platz 1, 30167 Hannover. Der Autor dankt dem *Verein zu Förderung der Zusammenarbeit von Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e.V.* für finanzielle Unterstützung und Sven Husmann, Lutz Kruschwitz und Jörg Laitenberger für hilfreiche Anmerkungen. Diese Arbeit wurde auf dem *3. Workshop Unternehmensbewertung* im Juni 2003 in Hannover präsentiert, der Autor dankt den Anwesenden für hilfreiche Anmerkungen.

Zusammenfassung

Will man den Einfluss der Einkommensteuer auf den Wert eines Projektes oder eines Unternehmens bestimmen, so bietet sich das Standardmodell als eines der populärsten Modelle an. Bei diesem Modell werden im Fall unter Unsicherheit im Nenner die Kapitalkosten um den Faktor $1 - s$, wobei s den Steuersatz darstellt, gekürzt.

In dieser Arbeit wird eine Anwendung im einfachen Binomialmodells betrachtet. Es zeigt sich, dass der gerade erwähnte Zusammenhang von Vor– und Nach–Steuer–Kapitalkosten in diesem Modell bei Wahl geeigneter Parameter eine Arbitragegelegenheit kreiert.

Sodann wird eine Alternative der Einbeziehung der Einkommensteuer in den Kalkül der Unternehmensbewertung diskutiert. Bei dieser Alternative zeigt sich, dass eine Erhöhung des Einkommensteuersatzes zu einer Verringerung des Unternehmenswertes führt.

JEL: G31, H24

1 Einleitung

Der klassische Kapitalwertkalkül der Investitionsrechnung verzichtet auf die Einbeziehung der Steuerbelastung auf Investorenebene. In vielen Fällen kann dieser Verzicht dazu führen, dass Investitionsentscheidungen verzerrt werden. Soll nun die Steuerbelastung Berücksichtigung finden, so wird üblicherweise das so genannte "Standardmodell" verwendet. Im Rahmen des Standardmodells verwendet man eine Kapitalwertgleichung, die die Steuerbelastung des Investors sowohl bei den Cashflows als auch bei der Alternativanlage explizit berücksichtigt.

Eine verwandte Fragestellung betrifft das Problem, welchen Einfluss eine eine sich ändernde Steuerbelastung auf die Attraktivität eines Projektes hat. Auch hier findet das Standardmodell der Investitionsrechnung Verwendung. Das so genannte Steuerparadox ist eines der bekannten Phänomene, die im Zusammenhang mit dieser Fragestellung in der Literatur ausgiebig diskutiert wurden.

Im Rahmen der Unternehmensbewertung werden Unternehmen als (riskante) Projekte aufgefasst. Die Frage, welchen fairen Wert diese Unternehmen aufweisen, wird dann ebenfalls mit Hilfe des Standardmodells beantwortet. Im Gegensatz zum klassischen Standardmodell unter Sicherheit ist die Umwelt hier aber unsicher, dies hat Implikationen für die zur Diskontierung verwendeten Zinssätze – sie entsprechen nicht den risikolosen Zinssätzen, sondern vielmehr den Kapitalkosten. In dieser Arbeit wird nun die folgende Fragestellung im Zentrum stehen: wir interessieren uns für den Einfluss einer sich ändernden Einkommensteuer auf den Wert eines Unternehmens, das unsichere (riskante) Cashflows verspricht.

Es ist bekannt, dass im Fall einer ewigen Rente die Einkommensteuer keine Wirkung entfalten kann, da sie sowohl im Zähler wie auch im Nenner gleichermaßen Berücksichtigung findet und sich damit kürzt. Diese Erkenntnis hat viele Wirtschaftsprüfer lange zu der Annahme verleitet, die Einkommensteuer habe in der Unternehmensbewertung im Grunde keine Wirkung.[1] Seit den Arbeiten von *Siepe* (1997) hat sich der Standpunkt des IdW dahingehend geändert, dass nun vielmehr die Einkommensteuer generell zu berücksichtigen sei, da sie bei schwankenden finanziellen Überschüssen sehr wohl einen Einfluss auf den Unternehmenswert haben kann. Im Falle wachsender Unternehmen führt dies weiter gehend zu der irritierenden Tatsache, dass der Unternehmenswert äußerst sensibel vom Einkommensteuersatz abhängt[2] – bei Unternehmen mit Streubesitz, bei dem die Wahl des richtigen Einkommensteuersatzes alles andere als offensichtlich ist, hat das enorme Schwierigkeiten bei der Bewertung zur Folge. Das IdW zog sich seinerzeit mit der Aufforderung aus der Affäre, in diesem Fall einen Einkommensteuersatz von 35% zu verwenden.[3]

Ein Ausweg schienen die Arbeiten von *Ollmann* & *Richter* (1999) und *Laitenberger* (2000) zu weisen. Die Autoren wiesen darauf hin, dass das deutsche Steuerrecht eine Differenzierung zwischen Kursgewinnen und Dividenden kennt und daher die klassische Gordon–Shapiro–Gleichung mit Wachstum nicht geeignet sei, den Unternehmenswert korrekt widerzuspiegeln. *Löffler* (2001) hat diese Erkenntnis insoweit berichtigt, als zwischen nicht realisierten und realisierten Kursgewinnen unterschieden werden muss.

Die von *Ollmann/Richter* und *Laitenberger* vorgeschlagenen Lösungen verweisen jedoch auf ein tiefer liegendes Problem. Dazu wenden wir uns zuerst dem klassischen Kapitalwertkalkül und seiner Anwendung in der Unternehmensbewertung zu. Der Wert eines Unternehmens wird hier durch die Gleichung

$$V_0 = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{CF}}_1]}{1+k} + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{CF}}_2]}{(1+k)^2} + \dots \tag{1}$$

bestimmt, wobei es sich bei den $\widetilde{\mathrm{CF}}_t$ um die unsicheren Zahlungsüberschüsse im Zeitpunkt t und bei k um die (hier der Einfachheit halber als konstant angenommenen) Kapitalkosten handelt.[4] Soll nun der Einfluss der Einkommensteuer auf den Unternehmenswert untersucht werden, so muss die Bewertungsgleichung (1) geeignet modifiziert werden. Dabei sind im Zähler die Nach–Steuer–Cashflows zu berücksichtigen. Ebenso ist selbstverständlich, dass nicht mit unversteuerten Kapitalkosten k aus Gleichung (1), sondern mit versteuerten Kapitalkosten k_s zu diskontieren ist

$$V_0 = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{CF}}_1 - \mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{CF}}_1 - \mathrm{AfA}_1)]}{1+k_s} + \frac{\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{CF}}_2 - \mathrm{s}(\widetilde{\mathrm{CF}}_2 - \mathrm{AfA}_2)]}{(1+k_s)^2} + \dots, \tag{2}$$

wobei jetzt s den Einkommensteuersatz und AfA_t die Abschreibungen darstellen. Die Anwendung einer solchen Gleichung ist von einer Reihe diverser Annahmen abhängig, die wir hier kurz wiedergeben wollen:

- Es handelt sich beim Unternehmen um eine Personengesellschaft, die ihren Gewinn nach der Rechenvorschrift “Cashflow abzüglich Abschreibung” bestimmt.

- Der Gewinn wird den Einkünften des Unternehmenseigners hinzugerechnet und ist von ihm zu dem Zeitpunkt zu versteuern, in dem der Cashflow zufließt. Es findet dabei ein sofortiger Verlustausgleich statt.
- Der Steuersatz s ist über die Lebensdauer des Unternehmens sicher und konstant.
- Auch eine eventuelle Kapitalmarktanlage unterliegt der Besteuerung.

Eine zentrale Frage betrifft nun den Zusammenhang von Vor–Steuer–Kapitalkosten k und versteuerten Kapitalkosten k_s. Beide Kapitalkosten stehen in wechselseitiger Relation zueinander und es ist gängige Praxis, hier eine lineare Beziehung zu postulieren[5]

$$k_s = k \cdot (1 - s). \tag{3}$$

Diese Aussage lässt sich dahingehend formulieren, dass aus der Kenntnis des Vor–Steuer–Kapitalkostensatzes sofort auf die Höhe des Kapitalkostensatzes nach Steuern geschlossen werden kann. Aber auch die Umkehrung ist richtig: wer den Kapitalkostensatz nach Steuern kennt, weiß, wie die erwarteten Cashflows des Unternehmens ohne Steuern zu diskontieren sind.

Unterstellt man nun den Fall der ewigen Rente (gleichmäßiges Wachstum der Cashflows und zu vernachlässigende Abschreibung), dann folgt allein aus formalen Überlegungen die Gordon–Shapiro–Gleichung[6] und damit die Bewertungsformel, die von *Ollmann* & *Richter* (1999) und *Laitenberger* (2000) kritisiert wurde. Wenn also *Ollmann/Richter* und *Laitenberger* das Ergebnis unserer bisherigen Überlegungen, die Gordon–Shapiro–Formel, kritisieren, dann muss ihre Kritik auch eine der von uns bisher detailliert angeführten Voraussetzungen betreffen. Wir werden im Folgenden argumentieren, dass der gerade erwähnte lineare Zusammenhang von Vor– und Nach–Steuer–Kapitalkosten (3) ökonomisch äußerst problematisch ist und nicht aufrecht erhalten werden kann.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Im ersten Kapitel wird durch die Anwendung des Standardmodells in einer Welt unter Unsicherheit eine Arbitragegelegenheit erzeugt. Wir nutzen dazu das in der Literatur ausreichend bekannte Binomialmodell. Im zweiten Kapitel wird eine neue Bewertungsgleichung vorgeschlagen, die diese Schwierigkeiten überwindet. Der Fall der ewigen Rente zeigt, dass diese neue Bewertungsgleichung wesentlich vom klassischen Standardmodell abweicht.

2 Im Standardmodell können Arbitragen entstehen

2.1 Ein Binomial–Beispiel

Wir betrachten ein Binomialmodell mit unendlich vielen zukünftigen Zeitpunkten $t = 1, \ldots$ Die Zukunft ist unsicher, in jedem Zeitpunkt sind ausgehend von einem Knoten zwei weitere Zustände, die wir mit *up* und *down* bezeichnen, möglich. Wir nehmen des weiteren an, dass die Cashflows eines (rein eigenfinanzierten) Unternehmens wie in Abbildung 1 veranschaulicht bei einer up–Bewegung mit dem Faktor u, bei einer down–Bewegung dagegen mit dem Faktor d wachsen. Die Zahlen u und d sind positiv und sinnvollerweise gilt $u > d$. Wenngleich im Zeitpunkt $t = 0$ keine Cashflows mehr zufließen, bezeichnen wir dennoch den "Ausgangspunkt" der CF–Bewegung mit CF_0.

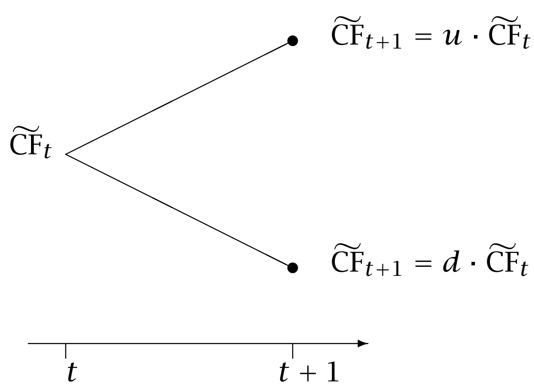

Abbildung 1: Cashflows vor Steuern $\widetilde{\mathrm{CF}}$ in $t, t+1$

Den Wert des Unternehmens im Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $\widetilde{\mathrm{V}}_t$, er ist unsicher. Es gibt des weiteren eine risikolose Geldanlage (Bond), die im Zeitpunkt t den Zins $r_f B$ zahlt. Der Investor kann in das Unternehmen oder den Bond investieren.

Die subjektiven Wahrscheinlichkeiten der Investoren bezeichnen wir wie folgt: der Investor erwartet in jedem Zeitpunkt eine up–Bewegung mit der Wahrscheinlichkeit p^u, eine down–Bewegung mit der Wahrscheinlichkeit $p^d = 1 - p^u$. Im Zeitpunkt t hat sich der Cashflow $\widetilde{\mathrm{CF}}_t$ realisiert. Wenn der Investor sich in diesem Zeitpunkt Gedanken über den sich eine Periode später einstellenden Cashflow $\widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1}$ macht, wird er hierfür den (bedingten) Erwartungswert

$$\mathrm{E}_{\,t}[\widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1}] = \widetilde{\mathrm{CF}}_t \cdot (p^u u + p^d d) \tag{4}$$

verwenden.

Wenden wir uns nun der Einkommensteuer zu. Das Steuersubjekt der Einkommensteuer ist der Investor, der die Rückflüsse aus dem Unternehmen versteuert. In unserem Fall gehen wir davon aus, dass die EBIT und Cashflows zusammenfallen: die Bemessungsgrundlage der Steuer in t ist also gerade der Cashflow $\widetilde{\mathrm{CF}}_t$. Der Steuersatz ist unabhängig von der Bemessungsgrundlage und zeitlich konstant. Die Steuerfunktion ist linear, und die Steuer $\mathrm{s} \cdot \widetilde{\mathrm{CF}}_t$ ist im Zeitpunkt t zu zahlen. Da auch Zinseinkünfte der Besteuerung unterliegen, erhält der Investor, wenn er in den Bond investiert, in jedem Zeitpunkt die Nach–Steuer–Zahlung $r_f(1-\mathrm{s})B$.

Um das Projekt zu bewerten, müssen wir des weiteren die Kapitalkosten festlegen. Diese Kapitalkosten stellen (bedingte) erwartete Renditen

$$k_{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{E}_t[\widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1}(1-\mathrm{s}) + \tilde{\mathrm{V}}_{t+1}]}{V_t} - 1 \tag{5}$$

dar und da die Cashflows einem Binomialmodell folgen (unabhängige Zuwächse), werden wir davon ausgehen, dass die versteuerten Kapitalkosten k_{s} in unserem Modell zeitlich konstant sind.[7]

Wir gehen des Weiteren davon aus, dass wir neben den subjektiven Wahrscheinlichkeiten auch die so genannten risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten Q, die wir mit q^u und $q^d = 1-q^u$ bezeichnen, kennen. Diese Wahrscheinlichkeiten haben folgende Eigenschaft: bildet man die Erwartungswerte der Cashflows mittels dieser Wahrscheinlichkeit und diskontiert sie mit dem risikolosen Zins, so erhält man den Wert eines Unternehmens. Für unser Modell gilt also[8]

$$\tilde{\mathrm{V}}_t = \frac{\mathrm{E}_t^Q[\widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1}(1-\mathrm{s}) + \tilde{\mathrm{V}}_{t+1}]}{1 + r_f(1-\mathrm{s})}. \tag{6}$$

Wir werden die Kenntnis dieser risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten dazu verwenden, um die Arbitragefreiheit unserer Modells zu diskutieren; nach *Harrison* & *Kreps* (1979) existieren solche risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten in vollständigen Märkten nämlich dann und nur dann, wenn das gewählte Modell arbitragefrei ist.[9]

Unser System ist nun in einem gewissen Sinn überbestimmt: die Bewertung des Unternehmens kann zum einen über Kapitalkosten, zum anderen über die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten erfolgen. Da beide Rechenvorschriften zum gleichen Ergebnis führen, muss es daher einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeiten Q und den Kapitalkosten k_s geben. Um diesen Zusammenhang herzuleiten, bedienen wir uns der folgenden Überlegung. Die Cashflows des Unternehmens wachsen in jedem Knoten um den Faktor u (falls die Bewertung aufwärts erfolgt) oder d (falls die Bewertung abwärts erfolgt). Demzufolge müssen, da die Kapitalkosten des Unternehmens per Annahme konstant bleiben, auch die Unternehmenswerte bei einer Aufwärts–Bewegung um den Faktor u und bei einer Abwärts–Bewegung um den Faktor d wachsen:

$$\tilde{\mathrm{V}}_{t+1} = \begin{cases} u \cdot \tilde{\mathrm{V}}_t & \text{falls } u, \\ d \cdot \tilde{\mathrm{V}}_t & \text{falls } d. \end{cases}$$

Dies setzen wir nun in die Gleichung (6) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{V}}_t &= \frac{q^u(u\widetilde{\mathrm{CF}}_t(1-\mathrm{s}) + u\tilde{\mathrm{V}}_t) + q^d(d\widetilde{\mathrm{CF}}_t(1-\mathrm{s}) + d\tilde{\mathrm{V}}_t)}{1 + r_f(1-\mathrm{s})} \\
&= \frac{(q^u u + q^d d)(\widetilde{\mathrm{CF}}_t(1-\mathrm{s}) + \tilde{\mathrm{V}}_t)}{1 + r_f(1-\mathrm{s})} \\
\Longrightarrow \quad \tilde{\mathrm{V}}_t &= \underbrace{\frac{(q^u u + q^d d)(1-\mathrm{s})}{1 + r_f(1-\mathrm{s}) - (q^u u + q^d d)}}_{=:A} \widetilde{\mathrm{CF}}_t .
\end{aligned}$$

Dabei ist der Faktor A ist eine nicht–stochastische Größe. Berücksichtigen wir diese deterministische Größe sowohl in der Gleichung (5) als auch in (6), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{V}}_t = \frac{\mathrm{E}_t[(1-\mathrm{s})\widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1} + A \cdot \widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1}]}{1 + k_{\mathrm{s}}} &= \frac{\mathrm{E}_t^Q[(1-\mathrm{s})\widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1} + A \cdot \widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1}]}{1 + r_f(1-\mathrm{s})} \\
\frac{\mathrm{E}_t[\widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1}]}{1 + k_{\mathrm{s}}} &= \frac{\mathrm{E}_t^Q[\widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1}]}{1 + r_f(1-\mathrm{s})} \\
\frac{(p^u u + p^d d)\widetilde{\mathrm{CF}}_t}{1 + k_{\mathrm{s}}} &= \frac{(q^u u + q^d d)\widetilde{\mathrm{CF}}_t}{1 + r_f(1-\mathrm{s})} \\
q^u u + q^d d &= \frac{1 + r_f(1-\mathrm{s})}{1 + k_{\mathrm{s}}}(p^u u + p^d d) \qquad (7)
\end{aligned}$$

Damit haben wir den bereits oben vermuteten Zusammenhang zwischen versteuerten Kapitalkosten k_s und risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten formulieren können.

Nach diesen aufwendigen Rechnungen wenden wir uns einem Zahlenbeispiel zu. Wir unterstellen, dass die subjektiven Wahrscheinlichkeiten, die versteuerten Kapitalkosten wie auch der risikolose Zins gegeben sind:[10]

$$k_s = 7.5\% \text{ (bei s = 50\%)}, \; r_f = 5\%, \; u = 1.2, \; d = 0.9333, \; p^u = 25\%.$$

Die Ermittlung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten zeigt, dass der Markt in unserem Beispiel frei von Arbitragegelegenheiten ist

$$\mathrm{s} = 50\% \quad \Longrightarrow \quad q^u = 0.07558, \; q^d = 0.92442.$$

Wird nun aber der Steuersatz geändert und unterstellen wir weiter, dass diese Änderung des Steuersatzes zu einer Änderung des Kapitalkostensatzes gemäß der linearen Relation (3) führt, dann ergibt sich ein anderes Bild. Für s = 0 (keine Steuern) beispielsweise erhalten wir einen Kapitalkostensatz von 15% und daraus risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{s} = 0\% \quad \Longrightarrow \quad k = 15\% \quad \Longrightarrow \quad q^u = -0.07609, \; q^d = 1.07609.$$

Ganz offensichtlich existiert in diesem Modell nun eine Arbitragegelegenheit, dieses Binomialmodell wird ökonomisch unsinnig, denn negative risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten sind gleich bedeutend mit Arbitragegelegenheiten.[11]

Wenn in einer Welt Arbitragegelegenheiten existieren, dann können wir ein Unternehmen nicht sinnvoll bewerten. Ein Unternehmen hat in einer solchen Welt überhaupt keinen Wert. Erst Recht können wir nicht behaupten, dass diese Unternehmen irgendwelche wie auch immer gearteten Kapitalkosten aufweist. Unser Beispiel lässt nur den folgenden Schluss zu: Wenn sich die versteuerten Kapitalkosten aus den unversteuerten Kapitalkosten gemäß der linearen Beziehung (3) bestimmen sollen, dann kann bei einer durchaus realistischen Wahl diverser Parameter im Binomialmodell eine Situation entstehen, in der die Vor–Steuer–Welt eine Arbitragegelegenheit aufweist und sich damit völlig rationalen Betrachtungen entzieht. Der Zusammenhang in Gleichung (3) verliert damit vollends seinen Sinn.

Die gerade beschriebene Arbitragegelegenheit darf nicht mit dem Steuerparadox verwechselt werden. Beim Steuerparadox wird eine Aussage über das Verhältnis der Welt vor und der Welt nach Steuern getroffen. In beiden Fällen können Unternehmen bewertet werden, die Höhe dieser Werte allerdings weichen voneinander ab. Beispielsweise ist der Wert vor Steuern kleiner als eine eventuelle Investitionsausgabe, während der Wert nach Steuern höher als eine eventuelle Investitionsausgabe ist. Die Abweichung beider Unternehmenswerte schafft gerade das Steuerparadox. Hier dagegen wird ein anderer Zusammenhang diskutiert: hier wird anhand eines Beispiel gezeigt, dass in einer Welt vor Steuern dem Unternehmen gar kein Wert mehr zugeordnet werden kann!

Das hier dargestellte Problem ist um so tückischer, weil es sich erst durch die Betrachtung der stochastischen Struktur der Cashflows offenbart. In der Unternehmensbewertung ist es üblich, sich allein auf die Erwartungswerte $\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{CF}}_t]$ und die Kapitalkosten k zu konzentrieren. Nahezu nichts wird über die Höhe der Cashflows in den einzelnen Zuständen (und damit ihre stochastische Struktur) in Erfahrung gebracht, ebenso verwendet man üblicherweise keine Zeit auf die Frage, ob die Cashflows einem Binomialmodell oder einem viel komplexeren Gebilde folgen. Dann aber bleibt einem (wie unser Beispiel zeigt) verborgen, dass wir uns im Bewertungskalkül möglicherweise auf sehr dünnem Eis bewegen – trotz erwarteter Cashflows und ebenso "vernünftiger" Kapitalkosten haben wir hier schlichtweg ein ökonomisch unsinniges, in sich widersprüchliches Modell vor uns, dessen Anwendung sich verbietet.

2.2 Wieso kommt es zu diesem Problem?

Das gerade erzielte Ergebnis ist verblüffend: wer bei der Unternehmensbewertung den Zusammenhang von Vor– und Nach–Steuer–Kapitalkosten (3) verwendet, der greift unter Umständen auf ein unsinniges ökonomisches Modell zurück. Wie kommt es zu diesem Ergebnis? Dazu müssen wir uns klarmachen, auf welcher Grundlage der Vergleich der Welt mit und ohne Steuern erfolgte.

Es war das Ziel der Bewertungsgleichung (2), den Wert eines Unternehmens bei einer sich ändernden Steuerbelastung zu untersuchen. Damit es sich hier um eine sinnvolle Fragestellung handelt, muss man offensichtlich die Unveränderlichkeit verschiedener Ausgangsgrößen fordern, wenn sich die Steuerbelastung ändert. Welche Größen sind es, deren Unveränderlichkeit man üblicherweise voraussetzt?

Sinnvollerweise verändern sich die (Brutto–)Cashflows nicht durch die Einführung einer

Einkommensteuer, das gleiche gilt auch für die subjektiven Wahrscheinlichkeiten des Investors. Beide Bedingungen reichen noch nicht, um einen sinnvollen Vergleich zu führen. In unserem Beispiel sind auch der risikolose Zins in der steuerlosen Welt und der risikolose Vor–Steuer–Zins in der besteuerten Welt identisch. Bewerten heißt vergleichen, und demzufolge muss es auch ein geeignetes Vergleichsobjekt, dessen Wert man bereits kennt, geben. Im oben notierten Beispiel hätten wir gleich zwei Objekte, die eine Bewertung des Unternehmens erlauben: es sind sowohl die Kapitalkosten (vor Steuern) wie auch die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten. Wer entweder diese Kapitalkosten oder aber die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten kennt, kann den Marktwert des Unternehmens ermitteln. Welche der beiden Größen man für eine Bewertung des Unternehmens auswählt, spielt keine Rolle, da zwischen beiden ein klar definierter formaler Zusammenhang (beschrieben in Gleichung (7)) besteht. An dieser Stelle tritt aber das Problem auf.

Konzentrieren wir uns dazu vorerst auf die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten und nicht auf die Kapitalkosten. A priori ist nicht offensichtlich, ob und wie sich gegebenenfalls die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bei Einführung einer Steuer ändern. Man muss sich aber nun folgendes klarmachen: wer eine feste Relation zwischen Vor– und Nach–Steuer–Kapitalkosten wie etwa in (2) unterstellt, der fixiert gleichzeitig eine gewisse Veränderung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten via Gleichung (7). Und diese Veränderung, dies zeigt unser Beispiel, kann in durchaus realistischen Umständen dazu führen, dass die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten negativ werden und das Modell damit ökonomisch unsinnig wird.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{k} & \underbrace{\longleftrightarrow}_{\text{wg. (7)}} & \boxed{Q \text{ (vor Steuern)}} \\ \updownarrow \text{ wg. (3)} & & \\ \boxed{k(1-s)} & \underbrace{\longleftrightarrow}_{\text{wg. (7)}} & \boxed{Q \text{ (nach Steuern)}} \end{array}$$

Abbildung 2: Zusammenhang von Kapitalkosten und Wahrscheinlichkeiten Q

Diese Überlegungen legen den Schluss nahe, dass nicht der Einfluss der Einkommensteuer auf die Kapitalkosten, sondern der Einfluss auf die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten Gegenstand der Modellierung sein sollte. Bei der Modellierung dieses Einflusses muss weiter gehend darauf geachtet werden, dass in unserem Modell keine Arbitragegelegenheiten entstehen. Wie dies geschehen kann, darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

3 Der Einfluss einer Einkommensteuer – ein neues Standardmodell

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass es ein Unternehmen in einer Welt ohne Steuern gibt, das im Zeitpunkt t Cashflows der Höhe $\widetilde{\mathrm{CF}}_t$ verspricht. Das Unternehmen lebt ewig. Die Erwartungswerte unter den subjektiven Wahrscheinlichkeiten bezeichnen wir mit $\mathrm{E}[\cdot]$. Es gebe weiterhin eine risikoneutrale Wahrscheinlichkeit Q – damit ist das Modell arbitragefrei. Für die Erwartungswerte unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten schreiben wir wieder $\mathrm{E}^Q[\cdot]$.

Wird nun eine Einkommensteuer erhoben, so mögen die Brutto–Cashflows vor Abzug der Einkommensteuer weiterhin $\widetilde{\mathrm{CF}}_t$ betragen. Wieder fallen Bemessungsgrundlage und Cashflows zusammen, es gibt einen sofortigen Verlustausgleich. Des weiteren sollen sich die subjektiven Wahrscheinlichkeiten wie auch der risikolose Zins vor Einkommensteuer nicht ändern. Was geschieht nun mit den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten? Ebenso könnten wir die Frage aufwerfen, wie sich die Preise einzelner Wertpapiere ändern, wenn eine Einkommensteuer der Investoren einbezogen wird.

Eine umfassende Antwort auf diese Frage könnte der Versuch ergeben, ein CAPM–Gleichgewichtsmodell mit mehreren Investoren zu betrachten. Im Anhang wurde die Rechnung für ein derartiges Modell vorgenommen. Dabei ergab sich folgendes Resultat. Unterstellt man einen einfachen Fall mit nur zwei Investoren, einer Erstausstattung beider Investoren sowie einfachen Nutzenfunktionen, die von einem willkürlichen Parameter a abhängig sind, so ist für die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten nach Steuern jede nur denkbare Konstellation (soweit sie Arbitragefreiheit zulässt) ökonomisch als Gleichgewicht möglich. Anders gesprochen: die Preise reiner Wertpapiere unterliegen nur den Beschränkungen, die sich aus der Arbitragefreiheit ergeben; weitere strukturelle Aussagen sind im Rahmen des CAPM nicht möglich. Aus diesem sehr einfachen Beispiel müssen wir den Schluss ziehen, dass Gleichgewichtsüberlegungen völlig ungeeignet sind, um die Veränderung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bei Einführung einer Einkommensteuer zu beschreiben. Es bleibt uns nichts anderes übrig, als hier eine ad hoc–Annahme zu treffen.

Diese ad hoc–Annahme besteht in der Unterstellung, dass sich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten durch die Einführung einer Einkommensteuer nicht ändern. Für uns stellt diese ad hoc–Annahme den einfachsten möglichen Fall dar, den wir unter der Vielzahl der gegebenen Möglichkeiten betrachten können. Die Annahme scheint gerechtfertigt zu sein, wenn die Einkommensteuer keinen großen Einfluss auf das Preissystem eines Kapitalmarktes ausüben wird. Natürlich könnte man auch ad hoc annehmen, dass sich die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten nach einer wohl definierten Regeln ändern, dann wären die nachfolgenden Überlegungen entsprechend der Regel zu modifizieren. Unsere ad hoc–Annahme hat aber den unbestreitbaren Vorteil, dass daraus sofort die Arbitragefreiheit des Kapitalmarktes mit Einkommensteuer folgt, denn die Existenz der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ist trivialerweise sichergestellt.[12]

Um eine handhabbare Bewertungsgleichung zu erhalten, sind jedoch noch weitere Voraussetzungen notwendig. So treffen wir die Annahme, dass die Cashflows des Unternehmens auto–regressiv sind [13]

$$\widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1} = (1 + g_t)\widetilde{\mathrm{CF}}_t + \varepsilon_{t+1}.$$

Die Cashflows weisen damit ein sicheres Wachstum in Höhe von g_t auf und sind zudem dem Einfluss von Störtermen ε_t ausgesetzt. Diese Störterme sind stochastisch unkorreliert. Die Annahme der Unkorreliertheit ist wesentlich schwächer als die oft geforderte Unterstellung, die Cashflows folgen einem random walk: im Fall des random walk müssen die Störterme zudem noch unabhängig sein.

Man kann nun zeigen (siehe dazu den Anhang), dass unter diesen Voraussetzungen der folgende Zusammenhang für die Kapitalkosten des Unternehmens vor und nach Steuern besteht:

$$1 + k_s = \frac{1 + r_f(1 - \mathrm{s})}{1 + r_f}(1 + k). \tag{8}$$

Fallen die Kapitalkosten vor Steuern mit den risikolosen Zinsen zusammen, so zeigt sich kein Unterschied zum klassischen Standardmodell (2). Ein möglicher Unterschied entsteht also nur bei der Bewertung von Unternehmen mit unsicheren Cashflows.

Dieser Unterschied zum klassischen Standardmodell wird aber besonders deutlich, wenn wir den Fall gleich bleibender Erwartungswerte der Cashflows oder kein Wachstum $g_t = 0$ betrachten. Dann kann der Unternehmenswert geschrieben werden als

$$V_0 = \frac{(1-\mathrm{s})\,\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{CF}}_1]}{(1+r_f(1-\mathrm{s}))\frac{1+k}{1+r_f} - 1} \tag{9}$$

In erster Näherung können wir den Nenner wie folgt abschätzen[14]

$$V_0 \approx \frac{(1-\mathrm{s})\,\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{CF}}_1]}{k - r_f\mathrm{s}}.$$

Hier zeigt sich ganz deutlich der Einfluss der unveränderlichen risikoneutralen Wahrscheinlichkeit im Nenner. Während im klassischen Standardmodell der versteuerte Cashflow durch die Differenz $k - k\mathrm{s}$ zu dividieren ist, verwendet man in dem hier vorgeschlagenen Modell (in erster Näherung) die Differenz $k - r_f\mathrm{s}$. Noch deutlicher zeigt sich der Effekt anhand eines Zahlenbeispiels. In der Abbildung 3 ist der Marktwert eines Unternehmens gemäß Gleichung (9) dem Marktwert $\frac{\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{CF}}_1]}{k}$ gegenübergestellt, der sich bei Anwendung des klassischen Standardmodells ergäbe. Insbesondere fällt sofort auf, dass mit wachsendem Steuersatz der Wert des Unternehmens fällt. Dieses Verhalten des Unternehmenswertes mit wachsendem Steuersatz ist vollständig entgegengesetzt zu den Ergebnissen, die man im klassischen Standardmodell erhält.

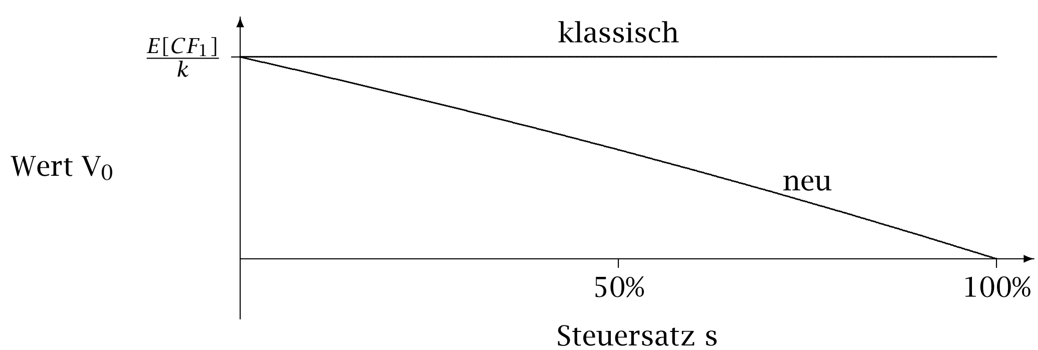

Abbildung 3: Neues versus klassisches Standardmodell in der ewigen Rente

4 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass die Anwendung des klassischen Standardmodells in durchaus realistischen Situationen zu Arbitragegelegenheiten führen kann. Ein Ausweg aus dem Dilemma bestand darin, die folgenden zwei Annahmen zu treffen:

- Das risikoneutrale Maß bleibt auch bei Einführung einer Einkommensteuer unverändert.
- Die Cashflows des Unternehmens sind auto–regressiv.

Es zeigte sich, dass unter diesen Voraussetzungen keine Arbitragegelegenheiten mehr konstruierbar sind. In diesem Fall konnte außerdem eine neue Gleichung ("neues Standardmodell") hergeleitet werden. Die Marktwerte eines Unternehmens beim neuen Standardmodell unterschieden sich wesentlich von den Werten beim klassischen Standardmodell.

Die beiden genannten Annahmen stellen ohne Frage eine Einschränkung dar. Will man diese Einschränkung nicht akzeptieren, so kann man allerdings keinesfalls zum klassischen Standardmodell zurückkehren. Um zum klassischen Standardmodell zurückkehren zu können, muss man vielmehr die stochastische Struktur der Cashflows offen legen und des weiteren beweisen, dass das Modell keine Arbitragegelegenheiten bei Einführung (oder Vernachlässigung) der Einkommensteuer erlaubt.

5 Anhang

5.1 Ein Gleichgewichtsbeispiel

Wir beschränken uns bei der Rechnung auf ein Ein–Perioden–Modell ($t = 0, 1$). Die Investoren können die beiden Basistitel handeln. Wir gehen davon aus, dass am Markt zwei Investoren mit den Nutzenfunktionen

$$V^{1,2}(\mu, \sigma^2) = \mu - a \cdot \sigma^2$$

handeln. $a > 0$ ist ein frei skalierbarer Parameter. Die Steuer ist linear, der Steuersatz ist s. Bemessungsgrundlage ist Cashflow minus Abschreibung, wobei die Abschreibung in Höhe des in $t = 0$ gezahlten Preises vorzunehmen ist.

Die Investoren erwerben Portfolios der Form

$$X^{1,2} = (X_S^{1,2}, X_B^{1,2}),$$

wobei X_B die Anzahl der (risikolosen) Bonds und X_S die Anzahl der Anteile am Unternehmen angeben. Der Index $1, 2$ verweist auf den Investor, der diese Anteile hält. Die Investoren besitzen die folgenden Erstausstattungen: der erste Investor hat eine Einheit Bonds zur Verfügung. Der zweite Investor hat eine Einheit des Unternehmens zur Verfügung:

$$\bar{X}^1 = (0, 1), \quad \bar{X}^2 = (1, 0).$$

Da wir ein Binomialmodell nutzen (nur zwei mögliche Zustände in der Zukunft), können wir die Erwartungswerte und Varianzen der Portfolios ebenfalls ermitteln. Der Einfachheit halber koste ein Bond eine Einheit ($B = 1$) und der Ausgangspunkt der Cashflows sei ebenfalls eine Geldeinheit ($CF_0 = 1$). Der risikolose Zins sei der Einfachheit halber null. Dann gilt für den Erwartungswert

$$\mathrm{E}[X] = X_S(p^u u + p^d d) + X_B.$$

Für die Varianz eines Portfolios gilt dann

$$\mathrm{Var}[X] = (X_S)^2 p^u p^d (u - d)^2.$$

Wir beginnen mit der Bestimmung der Nachfrage des ersten Investors. Er bestimmt sein optimales Portfolio X^1 nach Steuern anhand des Maximierungsproblems

$$\max_{p(X^1)=p(\bar{X}^1)} \mathrm{E}[(1-\mathrm{s})X^1 + \mathrm{s}p(X^1)] - a\,\mathrm{Var}[(1-\mathrm{s})X^1 + \mathrm{s}p(X^1)].$$

Setzen wir die uns bekannten Größen ein, so ergibt sich

$$\max_{p(X^1)=p(\bar{X}^1)} (1-\mathrm{s})\left(X_S^1(p^u u + p^d d) + X_B^1\right) + \mathrm{s}p(X^1) - a(1-\mathrm{s})^2(X_S^1)^2 p^u p^d (u-d)^2.$$

Wenden wir uns nun der Nebenbedingung zu. Der Preis des Bonds betrug eins, der Preis des riskanten Titels wird mit q bezeichnet. Dann gilt

$$p(X^1) = p(\bar{X}^1) \qquad \Longrightarrow \qquad X_S^1 \cdot q + X_B^1 = 1.$$

Setzen wir diese Nebenbedingung in das Maximierungsproblem des ersten Investor ein, so ergibt sich

$$\max_{X_S^1}\ (1-\mathrm{s})\left(X_S^1(p^u u + p^d d - q) + 1\right) + \mathrm{s} - a(1-\mathrm{s})^2 (X_S^1)^2 p^u p^d (u-d)^2.$$

Dieses Maximierungsproblem führt endlich auf die Lösung

$$X_S^1 = \frac{p^u u + p^d d - q}{2a(1-\mathrm{s})p^u p^d (u-d)^2}, \quad X_B^1 = 1 - X_S^1 \cdot q.$$

Analog ermitteln wir die Nachfrage des zweiten Investors und erhalten

$$X_S^2 = \frac{p^u u + p^d d - q}{2a(1-\mathrm{s})p^u p^d (u-d)^2}, \quad X_B^2 = q - X_S^2 \cdot q.$$

Die Gleichgewichtsbedingung erfordert nun die Übereinstimmung von Angebot und Nachfrage. Wir konzentrieren uns wegen des Walrasianischen Gesetzes dabei ausschließlich auf die Nachfrage nach dem unsicheren Titel. Hier muss die Gesamtnachfrage beider Investoren gerade eine Einheit ergeben und diese Gleichung legt den Preis des Stocks fest. Es ist

$$1 = X_S^1 + X_S^2 \quad \Longrightarrow \quad q = p^u u + p^d d - a(1-\mathrm{s})p^u p^d (u-d)^2.$$

Die letzte Gleichung verdeutlicht, dass der Preis des riskanten Titels (und die sich daraus ergebenden risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten) vom Parameter a abhängig sind. Allein durch die Wahl von a ist ein Aktienpreis von $p^u u + p^d d$ bis nahezu null denkbar. Dies sind genau diejenigen Preise, die sich aus den Arbitragerelationen ergeben: der Preis des Unternehmens muss positiv und sollte kleiner als der Erwartungswert der Zahlung sein, damit die Kapitalkosten des Unternehmens größer als der risikolose Zins (in unserem Fall null) werden. Das aber heißt nichts anderes, dass mit Variation des Parameters a auch alle denkbaren risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten möglich sind. Die Idee, die Höhe der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten unter Steuern aus einem Gleichgewicht herzuleiten, versagt.

5.2 Beweis der Gleichung (8)

Weil die Cashflows auto–regressiv sind, folgt der Zusammenhang[15]

$$\frac{\mathrm{E}_Q[\widetilde{\mathrm{CF}}_t]}{(1+r_f)^t} = \frac{\mathrm{E}[\widetilde{\mathrm{CF}}_t]}{(1+k)^t}. \tag{10}$$

Der Wert des Unternehmens bei Berücksichtigung der Einkommensteuer ergibt sich aus[16]

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}_Q[(1-\mathrm{s})\widetilde{\mathrm{CF}}_t]}{(1+r_f(1-\mathrm{s}))^t}.$$

Mit Hilfe von (10) folgt sofort

$$V_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}[(1-\mathrm{s})\widetilde{\mathrm{CF}}_t]}{\left(\frac{1+r_f(1-\mathrm{s})}{1+r_f}(1+k)\right)^t}.$$

Das war zu zeigen.

Literatur

Back, Kerry und Pliska, Stanley R.: "On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space." *Journal of Mathematical Economics*, 20 (1991): 1–18.

Brealey, Richard A. und Myers, Stewart C.: *Principles of Corporate Finance.* McGraw–Hill, New York, 2000, 6. Auflage.

Breuer, Wolfgang: *Investition I:* Entscheidungen bei Sicherheit. Gabler, Wiesbaden, 2000.

Copeland, Thomas E. und Weston, J. Fred: *Financial Theory and Corporate Policy*. Addison–Wesley, Reading, Mass., 1988, 3 Auflage.

Fama, Eugene F.: "Discounting under uncertainty." *Journal of Business*, 69 (1996): 415–428.

Feltham, Gerald A. und Ohlson, James A.: "Valuation and clean surplus accounting for operating and financial activities." *Contemporary Accounting Research*, 11 (1995): 689–731.

Franke, Günter und Hax, Herbert: *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*, Springer, Berlin, 1999, 4. Auflage.

Harrison, J. Michael und Kreps, David M.: "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets." *Journal of Economic Theory*, 20 (1979): 381–408.

Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland, Herausgeber. *Handbuch für Rechnungslegung, Prüfung und Beratung*, Band II. IdW–Verlag, Düsseldorf, 1998, 11. Auflage.

Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland. "IDW Standard: Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen (IDW S1) (Stand: 28.6.2000)." *Die Wirtschaftsprüfung*, 53 (2000): 825–842.

Johansson, Sven Erik: "Income taxes and investment decisions." *Swedish Journal of Economics*, 71 (1969): 103–110.

Kruschwitz, Lutz und Löffler, Andreas: "Unendliche Probleme bei der Unternehmensbewertung." *Der Betrieb*, 51 (1998): 1041–1043.

Kruschwitz, Lutz und Löffler, Andreas: "DCF." Discussion Paper Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, 265, Universität Hannover (2002).

Kruschwitz, Lutz: *Finanzierung und Investition*. Oldenbourg, München, Wien, 2002a, 3. Auflage.

Kruschwitz, Lutz: *Investitionsrechnung*. Oldenbourg, München, Wien, 2002b, 9. Auflage.

Laitenberger, Jörg: "Die Berücksichtigung von Kursgewinnen bei der Unternehmensbewertung." *FinanzBetrieb*, 2 (2000): 546–550.

Löffler, Andreas und Schneider, Dirk: "Martingales, Taxes, and Neutrality." Discussion Paper 269, Universitaet Hannover (2002).

Löffler, Andreas: "Besteuerung von Kursgewinnen und Dividenden in der Unternehmensbewertung." *FinanzBetrieb*, 3 (2001): 593–594.

Magill, Michael und Quinzii, Martine: *Theory of Incomplete Markets*. MIT Press, Cambridge, 1996.

Neus, Werner: *Einführung in die Betriebswirtschaftslehre aus institutionenökonomischer Sicht*. Mohr Siebeck, Tübingen, 2001, 2. Auflage.

Ollmann, Michael und Richter, Frank: "Kapitalmarktorientierte Unternehmensbewertung und Einkommensteuer: eine deutsche Perspektive im Kontext internationaler Praxis." In Hans-Jochen Kleineidam, Herausgeber, "Unternehmenspolitik und Internationale Besteuerung. Festschrift für Lutz Fischer," 159–178. Erich Schmidt, Berlin, 1999.

Ross, Stephen A.; *Westerfield, Randolph W.*; *und Jaffe, Jeffrey F.*: *Corporate Finance*. Irwin, Chicago, 1996, 4. Auflage.

Schierenbeck, Henner: *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*. Oldenbourg, München, Wien, 2000, 15 Auflage.

Siepe, Günter: "Die Berücksichtigung von Ertragsteuern bei der Unternehmensbewertung." *Die Wirtschaftsprüfung*, 50 (1997): 1–10 und 37–44.

Notes

[1]So liest man beispielsweise im *Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland* (1998, II. Band, Teil A, Rz. 195): "In der St/HFA 2/1983 wurde noch davon ausgegangen, dass in einer Vielzahl von Fällen auf die (explizite) Einbeziehung der Steuerbelastung des Investors verzichtet werden könne, da sie keine Auswirkungen auf den Unternehmenswert habe."

[2]Siehe dazu beispielsweise *Kruschwitz und Löffler* (1998).

[3]Siehe dazu *Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland* (2000) sowie *Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland* (1998, II.Band, Teil A, Rz. 117): "[Durch die Verwendung des Einkommensteuersatzes von 35% – A.L.] wird vermieden, dass der objektivierte Unternehmenswert von – aufgrund unterschiedlicher Einkommensverhältnisse der Unternehmenseigner – individuell verschiedenen Steuersätzen abhängig gemacht wird."

[4]Die Frage, welche stochastischen Eigenschaften der Cashflows eine Konstanz der Kapitalkosten zulassen, soll hier ausgeblendet werden (siehe dazu beispielsweise *Fama* (1996)). Das später präsentierte Beispiel eines Binomialbaumes der Cashflows wird konstante Kapitalkosten erlauben.

[5]Diese lineare Kapitalkosten–Relation taucht in der Literatur bereits sehr früh auf, sie findet sich vermutlich das erste Mal bei *Johansson* (1969). *Johansson* widmet der Frage, ob in der Tat die Gleichung (3) den korrekten Nach–Steuer–Kapitalmarktzins darstellt, allerdings mehrere Absätze und weist deutlich darauf hin, dass hierfür eine Reihe von steuerlichen Bedingungen erfüllt sein müssen. Heutzutage findet sich die Gleichung für den Fall unter Sicherheit in nahezu allen deutschen Lehrbüchern der Finanzierung, die das Thema Einkommensteuer behandeln: siehe beispielsweise *Breuer* (2000, S. 423), *Franke und Hax* (1999, S. 206), *Kruschwitz* (2002b, S. 139), *Neus* (2001, S. 299) oder *Schierenbeck* (2000, S. 370). Zur Anwendung dieses Zusammenhanges auf unsichere Zahlungsströme vergleiche *Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland* (1998, II. Band, Teil A, Rz. 202). Amerikanische Lehrbüchern behandeln höchstens den Fall der ewigen Rente, siehe *Brealey und Myers* (2000, S. 408), *Copeland und Weston* (1988, S. 558f.) oder *Ross*, *Westerfield und Jaffe* (1996, S.432f.).

[6]Der Beweis erfolgt durch simple Anwendung der Summenformel für geometrische Reihen.

[7]Im übrigen folgt aus dieser Definition der Kapitalkosten (5) sofort die Bewertungsgleichung (2), siehe dazu *Kruschwitz und Löffler* (2002, S. 22, Satz 1.1).

[8]In Teilen der Literatur spricht man auch von einem äquivalenten Martingalmaß oder Pseudowahrscheinlichkeiten. Mehr über risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten im Binomialmodell findet man bei *Kruschwitz* (2002a, S. 274ff.) oder *Copeland und Weston* (1988, S. 260). Der Zusammenhang von risikoneutraler Wahrscheinlichkeit und Arbitragefreiheit wurde von mehreren Autoren verallgemeinert. Einen Beweis für unser Modell ohne Steuern findet man beispielsweise bei *Back und Pliska* (1991), der Fall mit Steuern wurde in *Löffler und Schneider* (2002) bewiesen.

[9]Die Annahme der Vollständigkeit kann abgeschwächt werden: die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten sind in vollständigen Märkten eindeutig, in unvollständigen Märkten dagegen mehrdeutig. Für Details siehe *Magill und Quinzii* (1996, S. 73ff.).

[10]Die erwartete Wachstumsrate der Cashflows ist in diesem Beispiel gerade null:

$$p^u u + p^d d = 1.$$

[11]Vergleiche dazu beispielsweise *Kruschwitz* (2002a, S. 137ff.). *Kruschwitz* bezeichnet die von uns konstruierte Arbitragegelegenheit als vom Typ 1. Unsere Arbitrage impliziert nichts anderes als negative Arrow–Debreu–Preise im up–Zustand.

[12]Für Details siehe dazu *Löffler und Schneider* (2002).

[13]Ohne diese Annahme sind im Grunde keine gehaltvollen Aussagen möglich. Mehr über diese Annahme in *Kruschwitz und Löffler* (2002, S. 29ff.) oder in *Feltham und Ohlson* (1995).

[14]Man nutzt die Taylorreihe, hier gilt

$$\frac{1+x}{1+y} \approx 1 + x - y.$$

[15]Zum Beweis siehe *Kruschwitz und Löffler* (2002, Satz 2.3).

[16]Siehe dazu *Löffler und Schneider* (2002, Satz 2).